

山梨大学工学部 正員 深沢泰晴

山梨大学大学院 学生員 O太田貞次

1. はじめに 大型・軽量構造の需要に伴って提起された薄肉はりの曲げねじれ問題は、過去40有余年にわたるぼう大な研究の成果とし、ワグナーあるいはウラゾフの理論¹⁾の名のもとに、ひとまずその理論的体系化が完了した感があった。ところが最近また、C.F. Kollbrunner & N. Hajdin の研究²⁾をはじめ、西野等の論文³⁾にもみられるように、より合理的と思われるひずみ場の仮定から出発することにより、若干の発展もたらされた。すなわち、ワグナーあるいはウラゾフ理論では、薄肉中心面によって薄肉はりを代表させているのに対し、後者等においては板厚方向の断面の広がりをも考慮されており、それによって理論展開がより洗練された形でなされるようになった。

一方、著者等はそのような成果を踏えた上で、はりの構成要素である個々の板帯の解析を基本とし、それをはりとして集成することによって、はりの曲げねじれ問題を解くという慣用の手法とは若干異質な解析法をまとめたので、以下にその概要を報告するものである。このようなはりの構成板帯に着目する解析法は、曲げねじれ問題の初歩的研究段階において、すなわちI形はりのS Timoshenko, C. L. 等の2フランジはりのC. Weber 等の研究において採用され、さらにF. H. Bleich⁴⁾によって任意の形の薄肉多角断面への拡張が試みられたが、充分な定式化に成功せずいわば中途半端な段階で終わっているため、その後見捨てられてしまっていた感がある。著者等はそれをさらに改善、発展させることにより、曲げねじれ問題の一解析法としてまとめたものである。

2. はりの構成要素としての板帯の解析

薄肉多角等断面はりの一例を図-1に示す。はりの断面を含む平面上の任意の定点Oを原点とし、その平面上にx, y軸をとった右手系直角座標系(O-x, y, z)を設ける。

はりの構成要素である板帯のうち、任意の一つをとり出し(以下これを板帯*i*と呼ぶ)、これについてまず解析する。この板帯*i*の断面上に、その断面の中立点O_iを原点とし、断面の主軸に一致する座標軸ζ, ηをもつ右手系直角座標系(O_i-ζ, η, z)を考える。ζ軸がx軸となす角をα_iとする(符号は右ねじの法則)。図-2参照。

板帯*i*の断面上の任意点P(ζ, η, z)のx, y, z方向の変位成分をu, v, wとし、また中立点O_iのそれらをu_i, v_i, w_iとする。さらに断面の回転角をφ(符号は右ねじの法則)とすると、微小変形(仮定I)ならwに断面形不変の仮定(仮定II)のもとに、まず

$$\left. \begin{aligned} u &= u_i - (\zeta \sin \alpha_i + \eta \cos \alpha_i) \varphi \\ v &= v_i + (\zeta \cos \alpha_i - \eta \sin \alpha_i) \varphi \end{aligned} \right\} \text{--- (1) a, b}$$

次に、任意点Pのζ, η軸方向の変位成分を $\tilde{u}$, $\tilde{v}$ とすると

$$\left. \begin{aligned} \tilde{u} &= u \cos \alpha_i + v \sin \alpha_i = u_i \cos \alpha_i + v_i \sin \alpha_i - \eta \varphi \\ \tilde{v} &= -u \sin \alpha_i + v \cos \alpha_i = -u_i \sin \alpha_i + v_i \cos \alpha_i + \zeta \varphi \end{aligned} \right\} \text{--- (2) a, b}$$

ひずみ場の仮定(仮定III)として、次式を設定する;

$$\gamma_{\xi\eta} = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \eta} = 0, \quad \gamma_{\eta z}^* = \frac{\partial \tilde{v}^*}{\partial \xi} + \frac{\partial w^*}{\partial \eta} = 0 \text{--- (3) a, b}$$

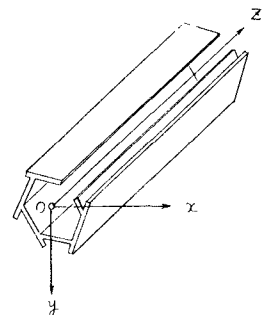


図-1. 薄肉開断面はり座標系(O-x, y, z)

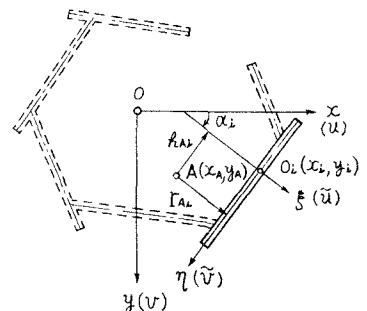


図-2. 板帯*i*の断面と座標系(O_i-ζ, η)

ここに、*印は板厚中心面上の点の値、すなわち $\xi=0$ に対応する値を意味する。式(3)に式(2)を代入し、 w について解くと

$$w = w_i - (\xi \cos \alpha_i - \eta \sin \alpha_i) u_i' - (\xi \sin \alpha_i + \eta \cos \alpha_i) v_i' + \xi \eta \varphi' \quad \text{--- (4)}$$

ここに、prime は ξ に関する微分を表わす。

結局、式(2)および(4)より、板帯 i 上の任意点 P におけるひずみ成分は、つぎのように求まる：

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{\xi} &= \varepsilon_{\eta} = \gamma_{\xi\eta} = \gamma_{\xi z} = 0 \\ \varepsilon_z &= w_i' - (\xi \cos \alpha_i - \eta \sin \alpha_i) u_i'' - (\xi \sin \alpha_i + \eta \cos \alpha_i) v_i'' - \xi \eta \varphi'' \\ \gamma_{\eta z} &= 2\xi \varphi' \end{aligned} \right\} \quad \text{--- (5) a-c}$$

次に、板帯 i より長さ dz の微小要素をとり出し、任意の仮想変形に対する内力の仮想仕事 $\delta \Pi_i$ 、ならびに面切断面に作用する応力と物体力のなす仮想仕事 δV_i を求める。まずそれらは次式で表わされる：

$$\delta \Pi_i = \int_{F_i} (\sigma_z \delta \varepsilon_z + \tau_{\eta z} \delta \gamma_{\eta z}) dF_i dz, \quad \delta V_i = - \int_{F_i} \{ (\sigma_z \delta w + \tau_{xz} \delta u + \tau_{yz} \delta v) + p_x \delta u + p_y \delta v + p_z \delta w \} dF_i dz \quad \text{--- (6) a, b}$$

ここに、 F_i は板帯 i の断面積、 p_x, p_y, p_z は単位体積当りの物体力の x, y, z 方向成分である。式(6)に式(5)bc (1), (4) を代入して整理すると $\delta \Pi_i + \delta V_i$ が次のように得られる：

$$\begin{aligned} \delta \Pi_i + \delta V_i = & - \left[N_i' \delta w_i - (M_{\eta i} \cos \alpha_i - M_{\xi i} \sin \alpha_i) \delta u_i' - (M_{\eta i} \sin \alpha_i + M_{\xi i} \cos \alpha_i) \delta v_i' - M_{\omega i} \delta \varphi' \right. \\ & - T_{\xi i} \delta \varphi' + (Q_{xi} \delta u_i + Q_{yi} \delta v_i + T_{\lambda} \delta \varphi) + \{ g_{xi} \delta u_i + g_{yi} \delta v_i + g_{zi} \delta w_i \\ & \left. + m_{xi} \delta \varphi - (m_{\eta i} \cos \alpha_i - m_{\xi i} \sin \alpha_i) \delta u_i' - (m_{\eta i} \sin \alpha_i + m_{\xi i} \cos \alpha_i) \delta v_i' - m_{\omega i} \delta \varphi' \right] dz \quad \text{--- (7)} \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} N_i &= \int_{F_i} \sigma_z dF_i, \quad M_{\xi i} = \int_{F_i} \sigma_z \xi dF_i, \quad M_{\eta i} = \int_{F_i} \sigma_z \eta dF_i, \quad M_{\omega i} = \int_{F_i} \sigma_z \xi \eta dF_i, \quad T_{\xi i} = 2 \int_{F_i} \tau_{\eta z} \xi dF_i \\ Q_{xi} &= \int_{F_i} \tau_{xz} dF_i, \quad Q_{yi} = \int_{F_i} \tau_{yz} dF_i, \quad T_{\lambda} = \int_{F_i} \{ \tau_{yz} (\xi \cos \alpha_i - \eta \sin \alpha_i) - \tau_{xz} (\xi \sin \alpha_i + \eta \cos \alpha_i) \} dF_i \end{aligned} \right\} \quad \text{--- (8) a-h}$$

$$\left. \begin{aligned} g_{xi} &= \int_{F_i} p_x dF_i, \quad g_{yi} = \int_{F_i} p_y dF_i, \quad g_{zi} = \int_{F_i} p_z dF_i, \quad m_{xi} = \int_{F_i} \{ p_y (\xi \cos \alpha_i - \eta \sin \alpha_i) - p_x (\xi \sin \alpha_i + \eta \cos \alpha_i) \} dF_i \\ m_{\xi i} &= \int_{F_i} p_x \xi dF_i, \quad m_{\eta i} = \int_{F_i} p_x \eta dF_i, \quad m_{\omega i} = \int_{F_i} p_z \xi \eta dF_i \end{aligned} \right\} \quad \text{--- (9) a-g}$$

3. 任意座標で表わした基本式

n 本の板帯から構成されるはりの長さ dz の微小要素に対する仮想仕事の原理は、次のように書ける、 $\delta \Pi + \delta V = \sum_{i=1}^n (\delta \Pi_i + \delta V_i)$ --- (10)

はりの $x-y$ 平面上に任意に選んだ定点 A を定める。定点 A (以下極 A と呼ぶ) の $x-y$ 座標を x_A, y_A とし、また定点 A の x, y 方向の変位成分を u_A, v_A とすると、式(1)と同様にまず次式が得られる；

$$u_i = u_A - (y_A - y_i) \varphi, \quad v_i = v_A + (x_i - x_A) \varphi \quad \text{--- (11) a, b}$$

さらに、はり軸方向の変位については、 w_A を ξ のみの関数として

$$w_i = w_A - (x_A - x_i) u_A' - (y_i - y_A) v_A' - \omega_A \varphi' \quad \text{--- (12)}$$

と書ける。ここに $\omega_A \varphi'$ は平面保持の法則に従わない変位分であり、 ω_A は相隣る板帯の接合面でのはり軸方向の変位の連続条件から次のように定められる。まず、式(4)に(11), (12)を代入して

$$w = w_A - (x - x_A) u_A' - (y - y_A) v_A' - (\lambda_{Ai} \xi + \lambda_{\eta i} \eta + \xi \eta + \omega_A) \varphi' \quad \text{--- (13)}$$

$$\left. \begin{aligned} \lambda_{Ai} &= (x_A - x_i) \sin \alpha_i - (y_A - y_i) \cos \alpha_i, \quad \lambda_{\eta i} = (x_i - x_A) \cos \alpha_i + (y_i - y_A) \sin \alpha_i \end{aligned} \right\} \quad \text{--- (14) a, b}$$

板帯 i と $i+1$ との接合面における w の連続の条件を、板厚中心面の交線においてのみ適用する(仮定 IV)と、次式が書ける、

$$\omega_{A, i+1} - \omega_{A, i} = \lambda_{Ai} a_i + \lambda_{A, i+1} a_{i+1} \quad (i = 1, 2, \dots, n-1) \quad \text{--- (15)}$$

ここに、 a_i および a_{i+1} は O_i および O_{i+1} より接合点までの距離を表わす(図-3 参照)。式(15)は差分方程式であり、この解は次式で与えられる；

$$\left. \begin{aligned} \omega_{A1} &= \frac{1}{F} \left\{ B \omega_A - \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{j-1} (a_j \lambda_{Aj} + a_{j+1} \lambda_{A, j+1}) \right\} \\ \omega_{Ai} &= \omega_{A1} + \sum_{j=1}^{i-1} (a_j \lambda_{Aj} + a_{j+1} \lambda_{A, j+1}) \quad (i = 2, 3, \dots, n) \end{aligned} \right\} \quad \text{--- (16) a, b}$$

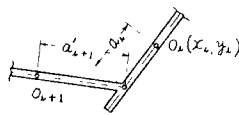


図-3. 板帯 i と板帯 $i+1$ の接合部

ここに、 F ははりの断面積、 $B_{\omega A}$ は ω_{Ai} の基準面を手える断面定数の一種であり、それぞれ次式で表わされる；

$$F = \sum_{i=1}^n F_i, \quad B_{\omega A} = \sum_{i=1}^n F_i \omega_{Ai} \quad \text{--- (17) a b}$$

さて、式 (10) に式 (7) を代入し、さらに式 (11), (12) を用いて整理すると、次式を得る；

$$\begin{aligned} & - (N' + g_z) \delta \omega_{\omega A} - (Q'_x + g_x) \delta u_A - (Q'_y + g_y) \delta v_A - (T'_{zA} + m_{zA}) \delta \varphi \\ & + (M'_y - Q_x + m_y) \delta u'_A + (M'_x - Q_y + m_x) \delta v'_A + (M'_{\omega A} - T_{\omega A} + m_{\omega A}) \delta \varphi' = 0 \quad \text{--- (18)} \end{aligned}$$

ここに、

$$\omega_{\omega A} = \omega_A + x_A u'_A + y_A v'_A \quad \text{--- (19)}$$

$$\left. \begin{aligned} N &= \sum_{i=1}^n N_i, \quad M_x = \sum_{i=1}^n (M_{xi} \sin \alpha_i + M_{zi} \cos \alpha_i + N_i y_i), \quad M_y = \sum_{i=1}^n (M_{xi} \cos \alpha_i - M_{zi} \sin \alpha_i + N_i x_i) \\ M_{\omega A} &= \sum_{i=1}^n (M_{\omega i} + N_i \omega_{Ai} + M_{xi} h_{Ai} + M_{zi} k_{Ai}), \quad T_s = \sum_{i=1}^n T_{si}, \quad T_{\omega A} = T_{zA} - T_s \\ Q_x &= \sum_{i=1}^n Q_{xi}, \quad Q_y = \sum_{i=1}^n Q_{yi}, \quad T'_{zA} = \sum_{i=1}^n \{ T_i + Q_{xi} (y_i - y_A) - Q_{yi} (x_i - x_A) \} \end{aligned} \right\} \quad \text{--- (20) a-e}$$

$$\left. \begin{aligned} g_x &= \sum_{i=1}^n g_{xi}, \quad g_y = \sum_{i=1}^n g_{yi}, \quad g_z = \sum_{i=1}^n g_{zi}, \quad m_x = \sum_{i=1}^n (m_{xi} \sin \alpha_i + m_{zi} \cos \alpha_i + g_{xi} y_i) \\ m_y &= \sum_{i=1}^n (m_{xi} \cos \alpha_i - m_{zi} \sin \alpha_i + g_{yi} x_i), \quad m_{zA} = \sum_{i=1}^n \{ m_{zi} + g_{yi} (x_i - x_A) - g_{xi} (y_i - y_A) \} \\ m_{\omega A} &= \sum_{i=1}^n (m_{\omega i} + m_{xi} h_{Ai} + m_{zi} k_{Ai}) \end{aligned} \right\} \quad \text{--- (21) a-g}$$

式 (18) より仮想変位の任意性から、はりのつりあい方程式が次のように得られる；

$$\left. \begin{aligned} N' + g_z &= 0, \quad Q'_x + g_x = 0, \quad Q'_y + g_y = 0, \quad T'_{zA} + m_{zA} = 0 \\ M'_x - Q_y + m_x &= 0, \quad M'_y - Q_x + m_y = 0, \quad M'_{\omega A} - T_{\omega A} + m_{\omega A} = 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{--- (22) a-g}$$

Q_x, Q_y, T_{zA} を消去すると

$$N' + g_z = 0, \quad M'_x + g_y + m'_x = 0, \quad M'_y + g_x + m'_y = 0, \quad M'_{\omega A} + T'_s + m'_{zA} + m'_{\omega A} = 0 \quad \text{--- (23) a-d}$$

次に、断面力と変位との関係を求める。まず、 $\sigma_z = E \epsilon_z$, $\tau_{yz} = G \gamma_{yz}$ より、式 (5) b c に式 (11), (12) を代入して、

式 (14), (19) を考慮すると

$$\left. \begin{aligned} \sigma_z &= E \{ \omega'_A - (x_i + \xi \cos \alpha_i - \eta \sin \alpha_i) u'_A - (y_i + \xi \sin \alpha_i + \eta \cos \alpha_i) v'_A - (\omega_{Ai} + h_{Ai} \xi + k_{Ai} \eta + \xi \eta) \varphi'' \} \\ \tau_{yz} &= 2G \xi \varphi' \end{aligned} \right\} \quad \text{--- (24) a b}$$

式 (5) a-c に式 (24) を代入すると、板帯 i の断面力と極 A の変位の関係が次のように得られる；

$$\left. \begin{aligned} N_i &= E F_i (\omega'_A - x_i u'_A - y_i v'_A - \omega_{Ai} \varphi''), \quad M_{xi} = -E J_{xi} (-u''_A \sin \alpha_i + v''_A \cos \alpha_i + k_{Ai} \varphi'') \\ M_{yi} &= -E J_{yi} (u''_A \cos \alpha_i + v''_A \sin \alpha_i + h_{Ai} \varphi''), \quad M_{\omega i} = -E C_{\omega i} \varphi'', \quad T_{si} = G J_{Ti} \varphi' \end{aligned} \right\} \quad \text{--- (25) a-d}$$

ここに、板帯 i の中を b_i 、板厚を t_i とすると

$$\left. \begin{aligned} F_i &= b_i t_i, \quad J_{xi} = \int_{F_i} \eta^2 dF_i = \frac{1}{12} b_i^3 t_i, \quad J_{yi} = \int_{F_i} \xi^2 dF_i = \frac{1}{12} b_i t_i^3 \\ C_{\omega i} &= \int_{F_i} \xi^2 \eta^2 dF_i = \frac{1}{144} b_i^3 t_i^3, \quad J_{Ti} = 4 \int_{F_i} \xi^2 dF_i = \frac{1}{3} b_i t_i^3 \end{aligned} \right\} \quad \text{--- (26) a-c}$$

式 (24), (25) より応力を板帯 i の断面力で表わすと

$$\sigma_z = \frac{N_i}{F_i} + \frac{M_{xi}}{J_{xi}} \xi + \frac{M_{yi}}{J_{yi}} \eta + \frac{M_{\omega i}}{C_{\omega i}} \xi \eta, \quad \tau_{yz} = \frac{T_{si}}{J_{Ti}} (2\xi) \quad \text{--- (27) a b}$$

式 (25) を式 (20) a-e に代入すると、断面力と変位の関係が次のように得られる；

$$\left. \begin{aligned} N &= E (F \omega'_A - Z_y u'_A - Z_x v'_A - B_{\omega A} \varphi''), \quad M_x = E (Z_x \omega'_A - J_{xy} u''_A - J_{yx} v''_A - C_{xA} \varphi'') \\ M_y &= E (Z_y \omega'_A - J_{yx} u''_A - J_{xy} v''_A - C_{yA} \varphi''), \quad M_{\omega A} = E (B_{\omega A} \omega'_A - C_{yA} u''_A - C_{xA} v''_A - C_{\omega A} \varphi'') \\ T_s &= G J_T \varphi' \end{aligned} \right\} \quad \text{--- (28) a-e}$$

ここに、はりの断面定数 a 次式で定義される；

$$\left. \begin{aligned} Z_x &= \sum_{i=1}^n F_i x_i, \quad Z_y = \sum_{i=1}^n F_i y_i, \quad J_x = \sum_{i=1}^n (J_{xi} \sin^2 \alpha_i + J_{yi} \cos^2 \alpha_i + F_i y_i^2) \\ J_{xy} &= \sum_{i=1}^n \{ (J_{xi} - J_{yi}) \sin \alpha_i \cos \alpha_i + F_i x_i y_i \}, \quad J_y = \sum_{i=1}^n (J_{yi} \cos^2 \alpha_i + J_{xi} \sin^2 \alpha_i + F_i x_i^2) \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} C_{\lambda A} &= \sum_{i=1}^n (F_i y_i \omega_{\lambda i} + J_{\eta i} h_{\lambda i} \sin \alpha_i + J_{\xi i} k_{\lambda i} \cos \alpha_i), \quad C_{y i} = \sum_{i=1}^n (F_i x_i \omega_{\lambda i} + J_{\eta i} h_{\lambda i} \sin \alpha_i + J_{\xi i} k_{\lambda i} \cos \alpha_i) \\ C_{\omega \lambda} &= \sum_{i=1}^n (F_i \omega_{\lambda i}^2 + C_{\omega i} + J_{\eta i} h_{\lambda i}^2 + J_{\xi i} k_{\lambda i}^2), \quad J_T = \sum_{i=1}^n J_{T i} \end{aligned} \right\} \text{-----(29)}_{a-i}$$

あるいは、点 O_i を通る x, y 軸に平行な軸に関する板帯 i の断面二次モーメント $J_{x i}, J_{y i}, J_{x y i}$ を用いると

$$J_{x i} = J_{\eta i} \sin^2 \alpha_i + J_{\xi i} \cos^2 \alpha_i, \quad J_{x y i} = (J_{\eta i} - J_{\xi i}) \sin \alpha_i \cos \alpha_i, \quad J_{y i} = J_{\eta i} \cos^2 \alpha_i + J_{\xi i} \sin^2 \alpha_i \text{-----(30)}_{a-c}$$

であるから、式 (29)_{c-i} は次式の形で計算することもできる：

$$\left. \begin{aligned} J_x &= \sum_{i=1}^n (J_{x i} + F_i y_i^2), \quad J_{xy} = \sum_{i=1}^n (J_{x y i} + F_i x_i y_i), \quad J_y = \sum_{i=1}^n (J_{y i} + F_i x_i^2) \\ C_{\lambda A} &= \sum_{i=1}^n \{ F_i y_i \omega_{\lambda i} + J_{x i} (x_i - x_A) - J_{x y i} (y_i - y_A) \}, \quad C_{y A} = \sum_{i=1}^n \{ F_i x_i \omega_{\lambda i} + J_{y i} (x_i - x_A) - J_{x y i} (y_i - y_A) \} \\ C_{\omega \lambda} &= \sum_{i=1}^n \{ F_i \omega_{\lambda i}^2 + C_{\omega i} + J_{x i} (x_i - x_A)^2 - 2 J_{x y i} (x_i - x_A)(y_i - y_A) + J_{y i} (y_i - y_A)^2 \} \end{aligned} \right\} \text{-----(31)}_{a-f}$$

つりあいの方程式を変位で表わすと、式 (23), (24) より、次のようになる：

$$\left. \begin{aligned} EF w_A'' - EZ_y u_A''' - EZ_x v_A''' - EB \omega_A \varphi''' + g_z = 0, \quad EZ_x w_A''' - EJ_{xy} u_A''' - EJ_x v_A''' - EC_{\lambda A} \varphi''' + g_x + m_x' = 0 \\ EZ_y w_A''' - EJ_y u_A''' - EJ_{xy} v_A''' - EC_{y A} \varphi''' + g_y + m_y' = 0, \quad EB \omega_A \varphi''' - EC_{y A} u_A''' - EC_{\lambda A} v_A''' - EC_{\omega A} \varphi''' + G J_T \varphi''' + m_{z A} + m_{\omega A}' = 0 \end{aligned} \right\} \text{-----(32)}_{a-d}$$

4. 主座標で表わした基本式

以上においては、座標系 $(O-x, y)$ 、 $\omega_{\lambda i}$ の基準面、極 A はいづれも任意に設定されているが、次式を満たすように定めることができる：

$$Z_x = 0, \quad Z_y = 0, \quad J_{xy} = 0, \quad B \omega_A = 0, \quad C_{\lambda A} = 0, \quad C_{y A} = 0 \text{-----(33)}_{a-f}$$

式 (33)_{a-c} は座標系 $(O-x, y)$ の原点の位置と座標軸の方向を、式 (33)_d は $\omega_{\lambda i}$ の自己つりあい系の基準面を、式 (33)_{e, f} は主極 A すなわちせん断中心の位置を手える。

このような主座標で基本式を表わすと、まず断面力と変位の関係は式 (28)、式 (31) より

$$N = EF w_A', \quad M_x = -EJ_x u_A'', \quad M_y = -EJ_y v_A'', \quad M_{\omega A} = -EC_{\omega A} \varphi'', \quad T_s = GJ_T \varphi' \text{-----(34)}_{a-e}$$

また、つりあいの方程式は、式 (23), (34) より、あるいは式 (32), (33) より

$$EF w_A'' + g_z = 0, \quad EJ_x u_A''' - g_x - m_x' = 0, \quad EJ_y v_A''' - g_y - m_y' = 0, \quad EC_{\omega A} \varphi''' - GJ_T \varphi''' - m_{z A} - m_{\omega A}' = 0 \text{-----(35)}_{a-d}$$

一方、式 (25), (34) より、板帯 i の断面力とはりの断面力との関係が次のように得られる；

$$\left. \begin{aligned} N_i &= \frac{F_i}{F} N + \frac{F_i y_i}{J_x} M_x + \frac{F_i x_i}{J_y} M_y + \frac{F_i \omega_{\lambda i}}{C_{\omega A}} M_{\omega A}, \quad M_{\xi i} = \frac{J_{\xi i}}{J_x} M_x \cos \alpha_i - \frac{J_{\xi i}}{J_y} M_y \sin \alpha_i + \frac{J_{\xi i} k_{\lambda i}}{C_{\omega A}} M_{\omega A} \\ M_{\eta i} &= \frac{J_{\eta i}}{J_x} M_x \sin \alpha_i + \frac{J_{\eta i}}{J_y} M_y \cos \alpha_i + \frac{J_{\eta i} h_{\lambda i}}{C_{\omega A}} M_{\omega A}, \quad M_{\omega i} = \frac{C_{\omega i}}{C_{\omega A}} M_{\omega A}, \quad T_{s i} = \frac{J_{T i}}{J_T} T_s \end{aligned} \right\} \text{-----(36)}_{a-e}$$

式 (27), (36) より、応力とはりの断面力との関係が次のように得られる；

$$\left. \begin{aligned} \sigma_z &= \frac{N}{F} + \frac{N_x}{J_x} (y_i + \xi \sin \alpha_i + \eta \cos \alpha_i) + \frac{M_y}{J_y} (x_i + \xi \cos \alpha_i - \eta \sin \alpha_i) + \frac{M_{\omega A}}{C_{\omega A}} (\omega_{\lambda i} + h_{\lambda i} \xi + k_{\lambda i} \eta + \xi \eta) \\ \tau_{yz} &= \frac{T_s}{J_T} (2\xi) \end{aligned} \right\} \text{-----(37)}_{a,b}$$

なお、主極 A と異なる極 B を考え、式 (33) の考慮のもとにこの2つの極に関する断面定数間の関係を求めると

$$\left. \begin{aligned} \omega_{\lambda i} &= \omega_{B i} + (y_A - y_B) x_i - (x_A - x_B) y_i, \quad C_{\lambda A} = C_{\lambda B} - (x_A - x_B) J_x \\ C_{y A} &= C_{y B} + (y_A - y_B) J_y, \quad C_{\omega A} = C_{\omega B} - (x_A - x_B) C_{\lambda B} + (y_A - y_B) C_{y B} \end{aligned} \right\} \text{-----(38)}_{a-d}$$

したがって、主極 A の座標は、式 (33)_{c, f}, (38)_{b, c} より

$$x_A - x_B = C_{\lambda B} / J_x, \quad y_A - y_B = C_{y B} / J_y \text{-----(39)}_{a,b}$$

5. むすび

以上の解析は、慣用の曲げねじれ理論と、その立脚する仮定が同一であるから、それと本質的な差異を有しているわけではない。しかしながら、次のような利点がある。すなわち、①はりの断面定数 $\omega_{\lambda i}$ がすべて構成板帯の断面定数の和で表わされているため、実用計算に便利である。②はりの断面変形およびせん断変形等を考慮した解析、ならびに曲げねじれ問題の塑性解析への発展の基盤として有効である。

参考文献 1) Vlasov, V Z : Thin-Walled Elastic Beams, 1961. 2) Kolbrunner, L.F. & N.Hajdin : Dünwandige Stäbe, 1972, 3) 西野他3名 : 軸力と曲げおよびねじれを受ける薄肉断面部材, 土木学会論文集 No. 225 1974 4) Bleich, F & H. Bleich : Buckling Strength of Metal Structures, 1952