

I - 2 有限要素法による定荷重下のクリープ解析

日本大学 正員 色 部 誠
同上 正員 〇 蛭 岡 亨 一

1. まえがき

金属のほとんどすべてが高温・高応力のもとでクリープ変形を生ずる。クリープ過程の多くは、クリープ速度が減少をたどる一期クリープから、次第にクリープ速度が一定となる二期クリープを経て、クリープ速度が増加する三期クリープに入り、クリープ破壊に到達する。クリープ法則には完成されたものはないと言われる程金属のクリープ現象は複雑である。したがって、クリープ解析にもいろいろな方法はあるが、基礎となるクリープ法則を誤まれば思いがけない結果を導くことがある。クリープ法則のほかで合理性を欠くと言われている時間硬化理論、全ひずみ理論は、クリープ解の上下限を与えるものとして、構造解析においてその意義を認めるものもある。

本報告は、定荷重のもとで一期クリープから二期クリープに至るあいだに生ずる変形および応力再配分の有限要素法による解析を示す。クリープ法則には時間硬化理論を適用し、その結果を Penny-Munro 法に基づいた微分方程式による解と比較してある。

2. 解析上の仮定

i) クリープ法則

上に述べたように、ここでの解析にはクリープ法則に時間硬化理論が用いられている。時間硬化理論では、クリープひずみ速度を応力、時間、温度の関数とするもので、下式によってあらわされる。

$$\frac{d\epsilon_c}{dt} = f_1(\sigma, T) \quad \text{または} \quad \frac{d\epsilon_c}{dt} = f_1(\sigma) \frac{df_2(t)}{dt} f_3(T) \quad (1)$$

(1)の第ニ式右辺の $f_1(\sigma)$, $f_2(t)$, $f_3(T)$ は、しばしば応力関数、時間関数、温度関数と呼ばれている。

時間硬化理論によって解を求めたのは比較のためであって、他のクリープ法則によって解析を進めることも、もちろん可能である。

ii) 多軸応力の扱い。

一般に、クリープ法則は一軸応力状態の変形に対してしか得られていない。多軸応力状態のもとでの変形にクリープ法則を拡張一般化するために、通常塑性理論の仮定が用いられているが、ここでもそれにしたかうことにする。すなわち、クリープには体積変化を伴わない。ひずみ速度は静水圧には影響されない。更に、材料は等方性とする。その結果、クリープひずみ増分テンソルを $d\epsilon_{ij}^c$ 、偏差応力テンソルを S_{ij} とすれば、

$$d\epsilon_{ij}^c = \frac{3}{2} \frac{d\bar{\epsilon}}{d\bar{\sigma}} S_{ij} \quad (2)$$

を得る。但し、 $d\bar{\epsilon}$, $\bar{\sigma}$ は各々相当ひずみ増分、相当応力をあらわす。クリープ法則(1)は $d\bar{\epsilon}$, $\bar{\sigma}$ に對しても成立し

$$d\bar{\epsilon} = f_1(\bar{\sigma}) \frac{df_2(t)}{dt} f_3(T) dt \quad (3)$$

相当応力は

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ (\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) \right\}^{1/2} \quad (4)$$

であり、これを偏微分して下式を得る。

$$\bar{\sigma} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{3}{2} S_{ij} \quad (5)$$

(3), (4), (5) を (2) に用いると次式のようになる。

$$d\epsilon_{ij}^c = f_1(\sigma) \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_{ij}} - \frac{d\lambda(t)}{dt} f_2(T) dt \quad (6)$$

3. 一期クリップの変分方程式と有限要素法への定式化

つり合い式、境界条件式を時間で微分すれば、次のような速度形のつり合い式、境界条件式を得る。

$$\dot{\sigma}_{ij,j} + \dot{X}_i = 0 \quad \dot{\sigma}_{ij} v_j = \dot{F}_i \quad (7)$$

真の応力速度分布に無限に近く、かつ静的可能な応力速度分布 $\dot{\sigma}_{ij} + \delta \dot{\sigma}_{ij}$ を考える。外力はらびに物体力の許容な変化速度を $\delta \dot{F}_i$, $\delta \dot{X}_i$ とすれば、(7) より次の各式を得る。

$$\delta \dot{\sigma}_{ij,j} + \delta \dot{X}_i = 0 \quad \delta \dot{\sigma}_{ij} v_j = \delta \dot{F}_i \quad (8)$$

また、次の変分式

$$\int_V \delta \dot{\sigma}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} dV = \int_V \delta \dot{X}_i \dot{u}_i dV + \int_\Sigma \delta \dot{F}_i \dot{u}_i dZ \quad (9)$$

は、(8) の成立条件とほる。Wang-Proger は、(9) の変分方程式より

$$\delta \left[\frac{1}{2} \int_V \dot{\sigma}_{ij} (\dot{\epsilon}_{ij}^p + 2 \dot{\epsilon}_{ij}^e) dV \right] = \delta \left[\int_V \dot{X}_i \dot{u}_i dV + \int_\Sigma \dot{F}_i \dot{u}_i dZ \right] \quad (10)$$

を与えた。ここに、 $\dot{\epsilon}_{ij}^p$ はひずみ ϵ_{ij} における弾性成分と塑性成分とを含む瞬間塑性ひずみである。また $\dot{\epsilon}_{ij}^e$ はクリープひずみである。よって

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij}^p + \dot{\epsilon}_{ij}^c$$

$\dot{\epsilon}_{ij}^p \ll \dot{\epsilon}_{ij}^c$ ならば、 $\dot{\epsilon}_{ij} \approx \dot{\epsilon}_{ij}^c$ と考えられるので、(10) は次のようにあらわせる。

$$\delta \int_V \dot{\sigma}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} dV = \delta \left[\int_V \dot{X}_i \dot{u}_i dV + \int_\Sigma \dot{F}_i \dot{u}_i dZ \right] \quad (11)$$

(9), (11) より

$$\int_V \dot{\sigma}_{ij} \delta \dot{\epsilon}_{ij} dV = \int_V \dot{X}_i \delta \dot{u}_i dV + \int_\Sigma \dot{F}_i \delta \dot{u}_i dZ \quad (12)$$

を得る。これは仮想仕事の原理に相当するものであり、これより有限要素法の解式を導く。

計算の簡易化のため、変形は塑性成分を除く弾性成分とクリープ成分とからなるものとすれば、“応力-ひずみ”の関係は

$$\dot{\sigma}_{ij} = E_{ijkl} (\dot{\epsilon}_{kl}^e - \dot{\epsilon}_{kl}^c) = E_{ijkl} \left\{ \frac{1}{2} (\dot{u}_{k,l} + \dot{u}_{l,k}) - \dot{\epsilon}_{kl}^c \right\} \quad (13)$$

とほる。以上のテンソル記法をマトリクスベクトル記法に改め、有限要素法における通常の記号を用いれば、上の各式を要素に適用して、

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \{\dot{\epsilon}\} = [B] \{\dot{\delta}\}^e \quad \dot{\sigma}_{ij} = \{\dot{\sigma}\} = [D] ([B] \{\dot{\delta}\}^e - \{\dot{\epsilon}\}^c) \quad (14)$$

$$\int_V \dot{\sigma}_{ij} \delta \dot{\epsilon}_{ij} dV = \int_{V_e} ([\delta \dot{\sigma}]^T [B]^T [D] ([B] \{\dot{\delta}\}^e - \{\dot{\epsilon}\}^c)) dV \quad (15)$$

$$\int_{\Sigma} \dot{F}_i \delta u_i dZ = \int_{\Sigma} (\{\Delta \delta\}^T)^T \{\dot{F}\}^e dZ = (\{\Delta \delta\}^T)^T \{\dot{F}\}^e \quad (15)$$

(12)に(15)を代入し、物体Vの項を除く

$$\{\dot{F}\}^e = \int_{V_0} [B]^T [D] [B] dV \{\delta\}^e - \int_{V_0} [B]^T [D] \{\dot{\varepsilon}^c\} dV \quad (16)$$

と表示され、上式の右辺第二項はクリップ変形による見かけの外力と見なし得る。これを $\{\dot{F}^c\}$ と置けば、(16)は

$$\{\dot{F}\}^e + \{\dot{F}^c\}^e = [K]^e \{\delta\}^e$$

と書き換えられ、これを考える物体全域にわたり重ね合わせ、各時間増分 Δt に対する変位増分 $\{\delta\} \Delta t$ を求めることができる。外力一定の場合は、 $\{\dot{F}\} = 0$ となる。

4. 計算例

内径対外径比1:5の円孔板の外周上に、一様は定半径方向 σ_0 が作用する変位拘束張りの問題を考える。これは一次元問題と見做すことができる、せん断応力の項はなくなる。要素の内半径を r_i 、外半径を r_o 、また $\Delta r = r_o - r_i$ とよく、要素の $[B]$ 、 $[D]$ は次のようになる。

$$[B] = \frac{1}{\Delta r} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1/r_i & 1/r_o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_o & -r_i \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad [D] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu \\ \nu & 1 \end{bmatrix} \quad (17)$$

(16)の右辺第二項の $\{\dot{\varepsilon}^c\}$ を要素中心に求め、これを積分記号の外に出す近似を採用すれば、この項は

$$\int_V [B]^T [D] dV \{\dot{\varepsilon}^c\} = \frac{E d\theta}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} -\frac{1+\nu}{2} r_i - \frac{1-\nu}{2} r_o & -\frac{1+\nu}{2} r_i + \frac{1-\nu}{2} r_o \\ \frac{1-\nu}{2} r_i + \frac{1+\nu}{2} r_o & -\frac{1-\nu}{2} r_i + \frac{1+\nu}{2} r_o \end{bmatrix} \{\dot{\varepsilon}^c\} \quad (18)$$

となる。ここに、 $d\theta$ は要素側面の法線夾角であり、要素厚を単位にとっている。

(1)において $f_1(\sigma) = \sigma^m$ なるべき関数則を適用すれば、 $f_1(\sigma) = \sigma^m$ である。これを用い、(6)をマトリクスペクトルに書と換えれば、応力成分 σ_z およびすべてのせん断応力はらびにせん断ひずみが0なることを考慮し

$$\{d\varepsilon\} = \bar{\sigma}^{m-1} \begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ -1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \end{Bmatrix} \frac{df_1(\sigma)}{d\sigma} \quad (19)$$

$f_1(\sigma)$ を除き、(19)を増分形に次の下式のようにあらわす。

$$\{\Delta \varepsilon\} = \bar{\sigma}^{m-1} \begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ -1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \end{Bmatrix} \frac{df_1(\sigma)}{d\sigma} \Delta t \quad (20)$$

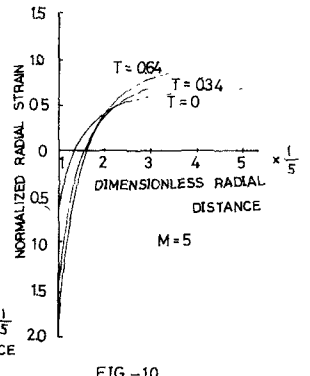
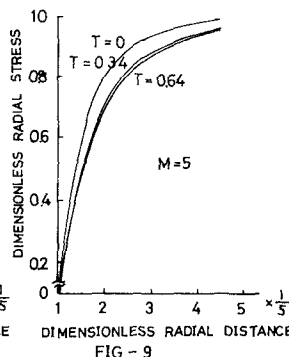
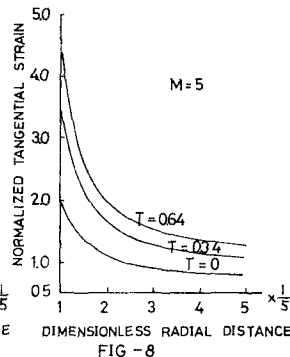
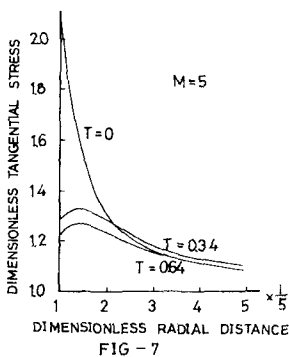
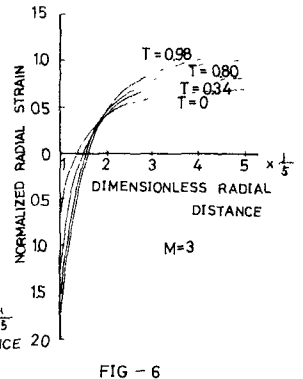
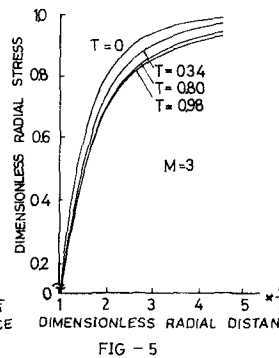
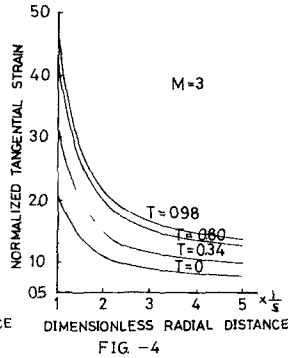
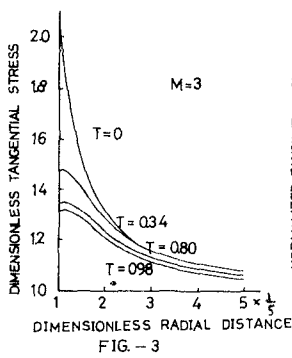
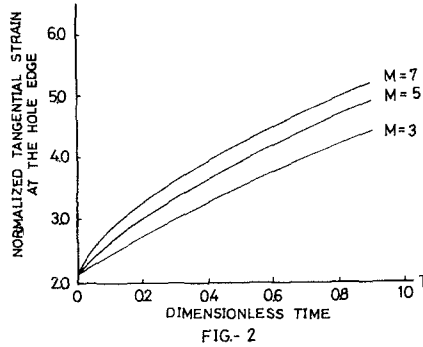
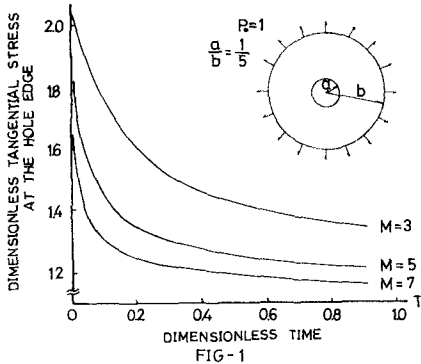
円孔板の外半径を単位にせり、 $\{\Sigma\} = \frac{1}{\sigma_0} \{\sigma\}$ $\{\lambda\} = \frac{1}{\varepsilon_0} \{\varepsilon\}$ $\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} = E$ とよく、(20)は

$$\begin{aligned} \{\Delta \varepsilon\} &= \frac{1}{\varepsilon_0} \{\Delta \varepsilon\} = \frac{\bar{\sigma}^{m-1}}{\sigma_0^{m-1}} \frac{1}{\sigma_0} \begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ -1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \end{Bmatrix} E \sigma_0^{m-1} \frac{df_1(\sigma)}{d\sigma} \Delta t \\ &= \bar{\Sigma}^{m-1} \begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ -1/2 & 1 \end{bmatrix} \{\Sigma\} \Delta t \end{aligned}$$

のように変形する。 Δt は下式の形をなす無次元時間である。

$$\Delta t = E \sigma_0^{m-1} \frac{d\epsilon(t)}{dt} \Delta t$$

これらの関係を用い、計算結果を無次元表示して図-1 ～ 図-10に示す。なお、計算は49要素に分割して行なった。 σ_0 の作用した瞬間における解は、理論解と良く合っている。解の全てが定常状態に至るまで、つまりクリープの状態に至るまで求められているが、応力・ひずみの変化は Penny-Mariott の解に非常に近い結果が得られる。



参考文献 R.K.Penny & D.L.Mariott "Design for Creep" 1971 MacGrawHill.