

II-16

相関関数、スペクトルによる水文資料の解析と予測

—— 山梨県内の大、小流域における解析例 ——

水資源開発公団 正員 ○貞弘 大佐
山梨大学 工学部 正員 萩原 能男

1. まえがき 近來の水需要の急激な増加は河川の効率的な利用を促し、その長期的な流出の様相を把握する必要性を一層強めた。この間、流出機構解明の立場から決定論的な解析がなされてきた一方、降雨流出系の入出力に着目して統計的手法によりその特性を調べ応答を求める方法が、日野、石原、高俣らにより行なわれている。この方法は、流出現象の画一的把握と、その特性の定量化に特長がある。ここでは山梨県下の流域面積の異なる釜無川 ($A=1001.0 \text{ km}^2$)、梓川 ($A=0.39566 \text{ km}^2$) について、降雨流出の周期的な特性を相関関数、スペクトル等で表わし、さらに Wiener の予測理論に基づく最適応答関数を用いて流出波形を求めた結果を報告する。

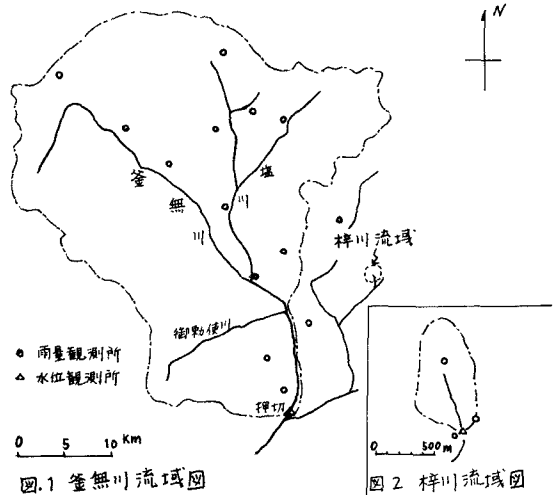


図1 釜無川流域図

図2 梓川流域図

2. 解析河川概要 釜無川(図1)は、富士川上流域を形成する河川で、年間降水量、年平均流出量は各々約 1500 mm 、 $20 \text{ m}^3/\text{sec}$ であり、一方梓川(図2)は甲府市下積翠寺町に所在する山地小河川で、昭和43年より当研究室で降雨と流量の観測を続けているが、年間降水量、最大流量は各々 930 mm 、 $0.340 \text{ m}^3/\text{sec}$ である。解析資料は、釜無川では建設省甲府工事事務所提供の昭和44~46年の日降雨流量資料、梓川では当研究室観測の同期間の日、時間資料を用い、各年、各季節について解析した。以下に、両河川の月別降雨流量資料を示す。(表1、表2)

3. 降雨流出系の特性 定常確率過程において、自己相関関数 $C(\tau)$ は、ある量が時間でだけ隔たった時にどれだけ自己の性質を残すかを表わし、この規格化である自己相関係数 $\rho(\tau)$ と共に、変量 X について次式のようになる。

$$C(\tau) = \text{Cov}\{X(t), X(t+\tau)\} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} (X(t) - \bar{X})(X(t+\tau) - \bar{X}) dt \quad (1)$$

$$\rho(\tau) = C(\tau) / C(0) \quad (2)$$

ここで $\bar{X}$ は X の平均、 Cov は共分散を表わす。次に、3)式に示す、自己相関関数のフーリエ変換 $P(f)$ はパワー・スペクトルと呼ばれ、各周波数 f の変動エネルギーへの寄与を表わす。

表-1 月別総雨量

河川名		1月	2月	3月	4月	5月	6月	7月	8月	9月	10月	11月	12月
釜無川	44				96.7	77.0	196.5	166.6	207.5	126.9	53.0	38.3	28.2
	45	52.5	59.6	51.5	108.6	105.7	324.3	76.6	95.0	92.2	75.7	47.1	36.8
	46	14.2	42.5	79.9	98.8	109.8	118.1	123.8	147.2	186.7	119.7	12.0	51.7
梓川	44				65.0	65.0	161.5	122.0	175.0	94.5	61.0	25.5	11.5
	45	54.5	32.0	49.0	53.0	104.0	248.5	22.0	73.5	86.5	68.0	37.0	10.5
	46	8.5	16.0	61.5	79.5	53.0	75.5	108.8	140.5	134.0	109.0	10.8	33.0

表-2 月別平均流出量

		1月	2月	3月	4月	5月	6月	7月	8月	9月	10月	11月	12月
釜無川	44				22.38	8.33	30.65	48.97	31.91	20.67	19.05	13.08	10.13
	45	5.56	10.95	11.38	18.77	14.71	76.06	21.48	12.55	16.84	21.27	17.24	14.22
	46	8.76	8.35	8.62	16.15	14.81	11.65	10.72	9.98	40.60	32.15	19.94	14.79
梓川	44				293.90	12.94	164.90	426.66	461.56	10.41	16.67	3.20	2.71
	45	49.48	29.45	92.72	1.85	68.46	1907.85	47.16	14.00	7.04	23.39	7.38	8.30
	46	8.17	7.55	18.46	94.19	35.52	8.88	139.64	49.65	408.63	493.32	10.02	14.97

$$P(f) = \int_{-\infty}^{\infty} C(\tau) e^{-i2\pi f\tau} d\tau \quad 3)$$

1) 降雨の特性 釜無川の日降雨自己相関係数 $P(\tau)$ 、スペクトル $P(f)$ を図3～図4に示す。 $P(\tau)$ は、 $\tau = 1 \sim 2$ 日で急減し、その後もランダムな変動を示すが、一方 $P(f)$ もホワイトなスペクトルを示しており、日降雨がランダムな現象であることがわかる。次に一年を春(3月～5月)、夏(6月～8月)、秋(9月～11月)、冬(12月～2月)に分け

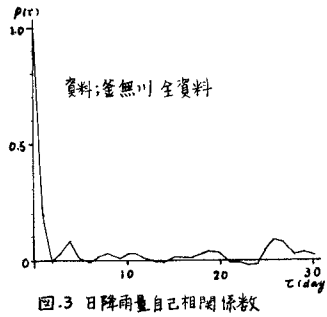


図3 日降雨量自己相関係数

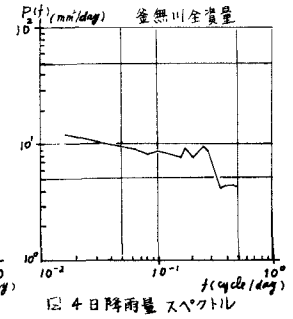


図4 日降雨量スペクトル

、各年、各季節の降雨量の平均値 RM 、分散 σ を求めれば表3のようになり、日降雨量は年単位で見るとき定常であることがわかる。

表-3 日降雨量 平均値、分散

	年	春	夏	秋	冬	年間
RM	44	2.85	6.20	2.40	1.56	3.60
	45	2.89	5.41	2.39	1.04	3.03
	46	3.14	4.23	3.50	—	3.03
	平均	2.96	5.30	2.76	1.30	3.22
σ	44	55.3	139.0	25.3	37.5	71.4
	45	35.1	234.7	24.8	7.3	84.6
	46	44.2	84.7	106.0	—	63.1
	平均	44.9	153	52.0	22.4	73.0

2) 流量の特性 両河川の日流量自己相関係数 $P(\tau)$ 、スペクトル $P(f)$ を図5～図8に示す。降雨に比べ流量の $P(\tau)$ は減少が緩く流域の貯留性を表わしており、減少の程度も各年で差がみられる。表-1、表-2と比較すれば、昭和44年、45年のような洪水型の年で $P(\tau)$ の減少は速やかであり、46年のように流出

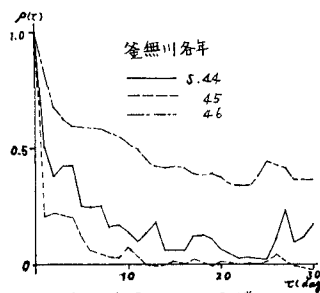


図5 日流量自己相関係数

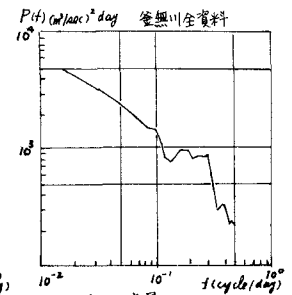


図6 日流量スペクトル

が平均している年では相関が良いことがわかる。さらに、釜無川と梓川を比較すれば、流域面積が大きければそれだけ地下浸透分も多いことがいえる。これを定量的に表わす為、流量の減少が指数関数的であることから、自己相関係数を指数関数 $e^{-\alpha\tau}$ で近似し、指数 α の値で相関の程度を表わした。流量のスペクトルは長周期から短周期にかけて減少しており流出がかなりの長周期成分を含んでいる事を示している。

3) 降雨流出系の特性 次に、降雨流出のような2つの現象の相関をみるには、相互相関関数 $R(\tau)$ が用いられ、相互相関係数 $\rho_{xy}(\tau)$ と共に2変量 X 、 Y につき、各々4式、5式で表わされる。

$$R(\tau) = \text{cov}\{X(t), Y(t+\tau)\}$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} (X(t) - \bar{X})(X(t+\tau) - \bar{Y}) dt \quad 4)$$

$$\rho_{xy}(\tau) = R(\tau) / \{C_{xx}(0) \cdot C_{yy}(0)\}^{1/2} \quad 5)$$

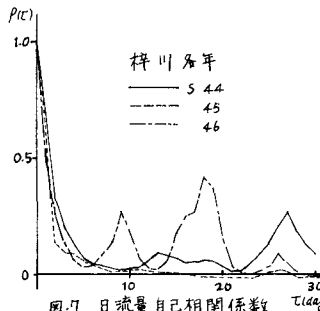


図7 日流量自己相関係数

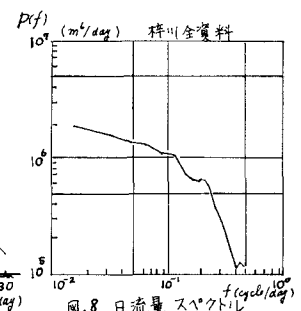


図8 日流量スペクトル

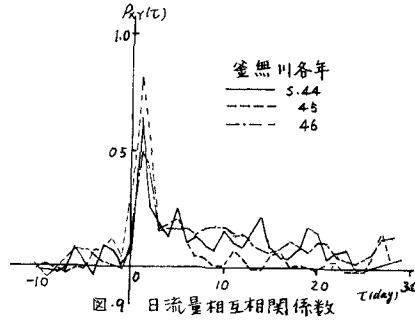
ここで C_{xx} 、 C_{yy} は各々 X 、 Y の自己相関係数を表わす。

釜無川の、日降雨流量相互相関係数 $\rho_{xy}(\tau)$ を図9、図10に示す。図9は各年の $\rho_{xy}(\tau)$ であるが、これより、降雨と流出の遅れは1日程であることがわかる。又、ピークの値は大きい順に45年、44年、46年であるが、これは豪雨による表面流出の増加を表わすものと思われる。図10は、45年の各季節の $\rho_{xy}(\tau)$ であるが、季節

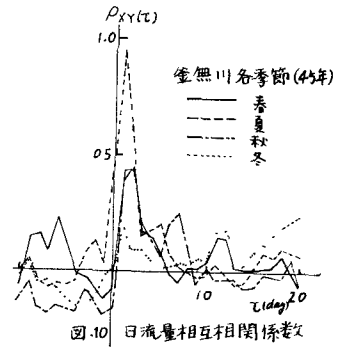
表-4 指数 α

	釜無川		梓川	
	α	α の平均	α	α の平均
44年	0.250		0.458	
45	0.490	0.254	0.611	0.490
46	0.0591		0.400	

により、流出の周期成分の割合が変わるのが読みとれる。
梓川の場合、小河川ゆえの出水の速さを考慮すれば、時間資料を用いた解析が有効であると思われる。図・11は、45年の各季節についての時間資料による $\rho_{xy}(\tau)$ であるが、その形は実際の流出曲線



図・9 日流量相互相関係数

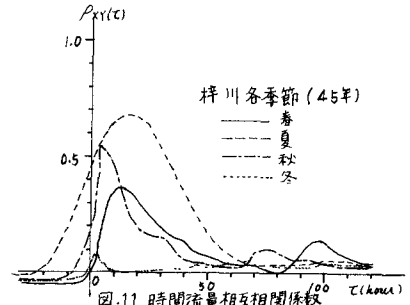


図・10 日流量相互相関係数

に似た形状をしており、その最大値を与える τ の値は各季節によって異なるが、オーダーとしては30年の平均で5時間~30時間と与えられる。(表・5)

表・5 梓川日時間流量 τ_m ($\rho_{xy}(\tau)$ の最大値を与える τ)

	春			夏			秋			冬		
年度	44	45	46	44	45	46	44	45	46	44	45	46
τ_m	52	12	29	—	17	13	3	4	8	8	2	—
τ_m 平均	31 hr			15 hr			5 hr			5 hr		



図・11 時間流量相互相関係数

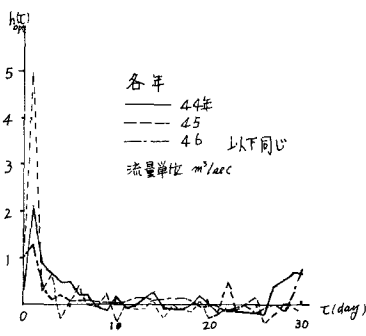
4. 最適応答関数と流出波形 ここでは、降雨流出系を、入力・出力、それにそれらの変換の形でとらえ、不規則な入力に対する出力の応答より変換系を明らかにし、最適な応答関数を求める。この場合、入出力と変換系は、線形定常システムとみなせるものと仮定する。今、入力を X 、出力を Y 、単位の入力に対する応答関数を $h(\tau)$ とすれば、衆知のたたみこみ積分より、 $Y_0(t)$ は 9) 式で表わされる。

$$Y_0(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) X(t-\tau) d\tau \quad (9)$$

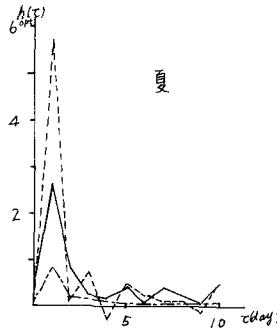
この $Y_0(t)$ と実際の出力 $Y_a(t)$ の間には、noise による誤差 $\varepsilon(t)$ が生じるので、この自乗平均 $E\{\varepsilon(t)\} = E\{(Y_0(t) - Y_a(t))^2\}$ を最小にする応答を求めていく。 $E\{\varepsilon(t)\}$ は、関数 $h(\tau)$ の関数であるので、これは変分問題における汎関数であり、 $E\{\varepsilon(t)\}$ の最小値を求めるという問題は、汎関数 $E\{h(\tau)\}$ を最小にする変関数 $h(\tau)$ を求める変分問題に帰着される。停留条件を満たす最適応答関数 $h_{opt}(\tau)$ は以下のように表わされる。

$$C_{xd}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h_{opt}(\tau) C_{xx}(t-\tau) d\tau \quad (t \geq 0) \quad (10)$$

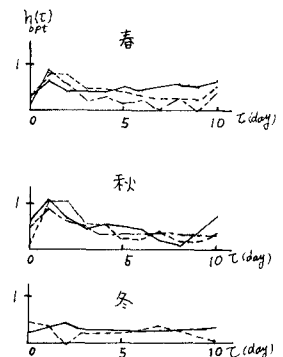
10) 式は Wiener-Hopf の方程式と呼ばれ、 C_{xd} は X と Y_a の相互相関、 C_{xx} は X の自己相関を表わす。10) 式を数値的に解いて h_{opt} を求め、9) 式より流出波形を計算する。以下に、釜無川、梓川の各年、各季節の h_{opt} を示す。



図・12 釜無川各年最適応答関数



図・13 釜無川各季節最適応答関数



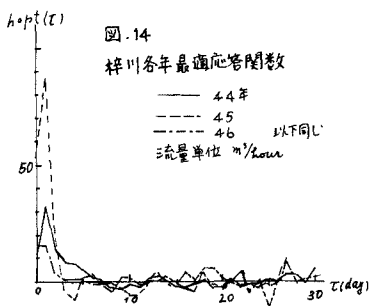


図.14
梓川各年最適応答関数

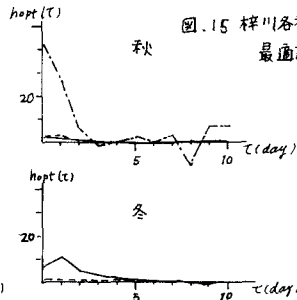
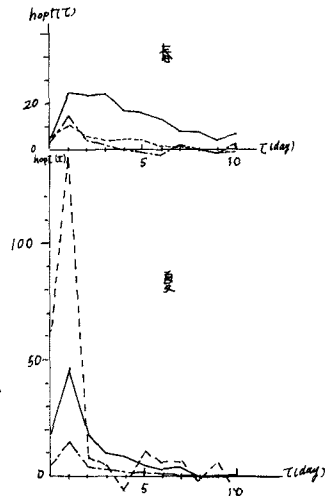


図.15 梓川各季節
最適応答関数



釜無川における各年の $hopt$ (図.12) は、どの年でも $t=1$ 日にピークがあり、洪水型の年ほどピークが高く、不規則に変動している。 $hopt$ のピークは、自己相関係数の減少度(指数)は、相互相関係数のピークと明らかな相関がある。各季節の $hopt$ (図.13) より、夏は洪水流出、冬は長期流出の傾向があり、春、秋はその中間であることがわかる。夏でピークに差が生じるのは、豪雨による流出成分と思われるが、一年を通じて、夏の $hopt$ が年間の $hopt$ を決定している。梓川各年の $hopt$ は、釜無川と同様 $t=1$ 日でピークを生じ、その大きさは釜無川と同順である。季節別にみると(図.15) ピークの部分は釜無川と同じ傾向を示すが、その他の部分は極端に値が小さく、低水流出が極めて少ないことがわかる。次に、図.16、図.17に、両河川的全資料についての $hopt$ を用いて計算した流出波形の一部を示す。これより、大きな流出のない平常時においては、予測流量が実測流量を上回っているのがわかる。これは、 $hopt$ が若干年余の資料について唯一作成されたものであり、洪水時の非線形性の強い流出の影響が平均化されたためであると思われる。釜無川においては、平常時では実測値の増減が予測値に比べ緩やかであり、かなりの長周期流出成分の存在を示しているが、梓川では実測値の増減も比較的急である。又、両波形がピークをとる時間に着目すれば、これに大きなずれのないことから $hopt$ の形がほぼ正しいことがいえよう。

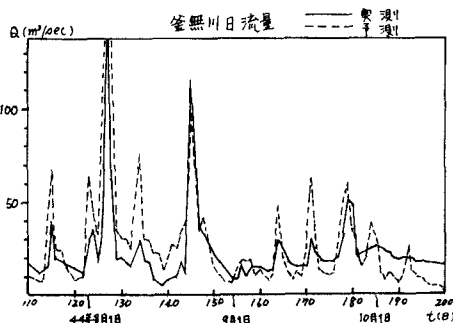


図.16

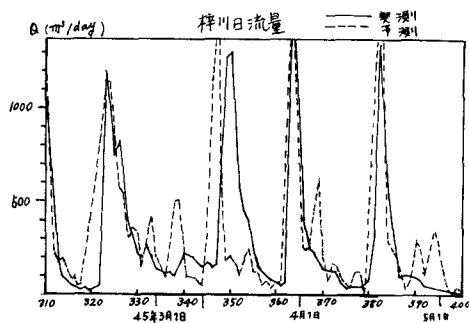


図.17

5. まとめ 以上のように、山梨県下の2河川について統計的手法により、流出系の特性を表わし、流出波形を求めた。降雨は年単位でみた場合ほぼ定常と思われるが、流出系は、予測波形が非線形成分の影響で実測波形と一致しない問題点があり、この処理に課題を残した。DATA処理にあたっては、石川廣(大成建設)、小立香司(島根県)両氏の御協力をいただきました。

文献 1) 日野幹雄「データ処理の手法」(応用水理学下II, 1.5) 丸善 1971
2) 石原高穂・池沢「降水と流量の長期的相互関係に関する研究」土木学会第22回年講前刷集 1969