I －24　動的問題における数値計算法の精度に関する一考察

東京都立大学　正会員　国井隆弘
熊谷組技術研究所　正会員○鹿又和夫

1. まえがき

動的外力に対する応答問題を扱う場合，微分方程式を数値的に解く必要がしばしば生じる。その方法にはルンゲ·クッター法をはじめ差分法にいたるまでいくつか考えられるが，これらの方法で得られる解が理論解とどの程度の差を示すものなのか，あるいは，これらの方法はその扱いが複雑となる程その信頼性が高いと考えられるが，それではこれらの方法から得られる値がお互にどの程度の違いを見せるのか，について各種の入出力関係のもとに明らかにしておく事は実際に数値計算を行う際に有用であろう。

本報告は1自由度系に関して，差分法，線形加速度法およびルンゲ·クッター法を選び，正弦波外力に対しては計算時間キザミ（Δt）と固有周期，入力周期と固有周期および減衰の有無をパラメーターにして，理論解と比較検討し，不規則波外力に対してはTaftおよびEl-Centro記録を対象に応答スペクトルを求めて，各計算方法が示す値の差を比較検討したものである。

2. 方法

(a) 正弦波外力の場合

1自由度系の固有円振動数をω_0とすれば運動方程式は次式となる。

$$\ddot{x} + 2h\omega_0\dot{x} + \omega_0^2 x = -\sin\omega t \qquad (1)$$

ここで$x, \dot{x}, \ddot{x}$はそれぞれ応答の変位，速度，加速度を意味し，hは粘性減衰定数，ωは外力の円振動数である。いま1自由度系の固有周期をT_0（$=2\pi/\omega_0$），外力の周期をT（$=2\pi/\omega$）とすれば，計算方法は以下に列記する如くとなる。

$\dot{x} = f(x, t)$ のとき

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{4}(M_0 + 3M_2) + O(\Delta t^4)$$
$$M_0 = f(x_n, t_n)\Delta t$$
$$M_1 = f\left(x_n + \frac{M_0}{3},\ t_n + \frac{\Delta t}{3}\right)\Delta t$$
$$M_2 = f\left(x_n + \frac{2}{3}M_1,\ t_n + \frac{2}{3}\Delta t\right)\Delta t$$

図-1 ルンゲ·クッター法の式

①外力のタイプは$T=T_0/2$, $T=T_0$, $T=2T_0$の3種の正弦波とする。

② 時間キザミは$\Delta t = T_0/n$として，$n = 2^a$　$a = 3, 4, 5, 6$ の4種とする。

③外力の経続時間は$10 \times T_0$とする。

④ 減衰定数は $h=0.0$ と $h=0.02$ の2種とする。

以上の方法により得られる結果は任意のT_0に対して適用できることとなる。

(b) 不規則波外力の場合

用いられた加速度波形記録はTaft（1952, N21°W）およびEl-Centro（1940, NS）の最初の20秒間で0.01秒キザミで与えられるものである。これらの記録は最大値を1galに修正され，変位応答スペクトルが検討の対象とされた。減衰定数は(a)と同じく $h=0.0$ および $h=0.02$ の2種とした。

(c) 数値計算法

方法は前述した如く差分法，線形加速度法およびルンゲ·クッター法の3種が検討された。ルンゲ·クッター法は図-1で表わされるものを用いた。前二者の方法の説明は割愛する。

3. 結果·考察

正弦波外力を受けた場合の応答の絶対最大値に関して理論値に対する誤差を示したのが図-2 a～fである。これから次に記す4つの考察ができよう。〈その1〉 全体としてnが大となれば（時間キザミが小さい程）各方法とも精度が良くなるが，$n=64$でルンゲ·クッター法，線形加速度法，差分法の順に良い精度を示す。しかしnが小さくなるとこの順序が乱れ始め$n=8$ではほぼ逆となる。このことは短周期の構造物における問題点を提案していると言えよう。〈その2〉誤差の正負を考慮すれば，差分法，線形加速度法，ルンゲ·クッター法の順に誤差が大きい。即ちこの順でより安全側の値を示すと考えられる。〈その3〉減衰の有無の影響はさほど顕著でないが，減衰により正の誤差

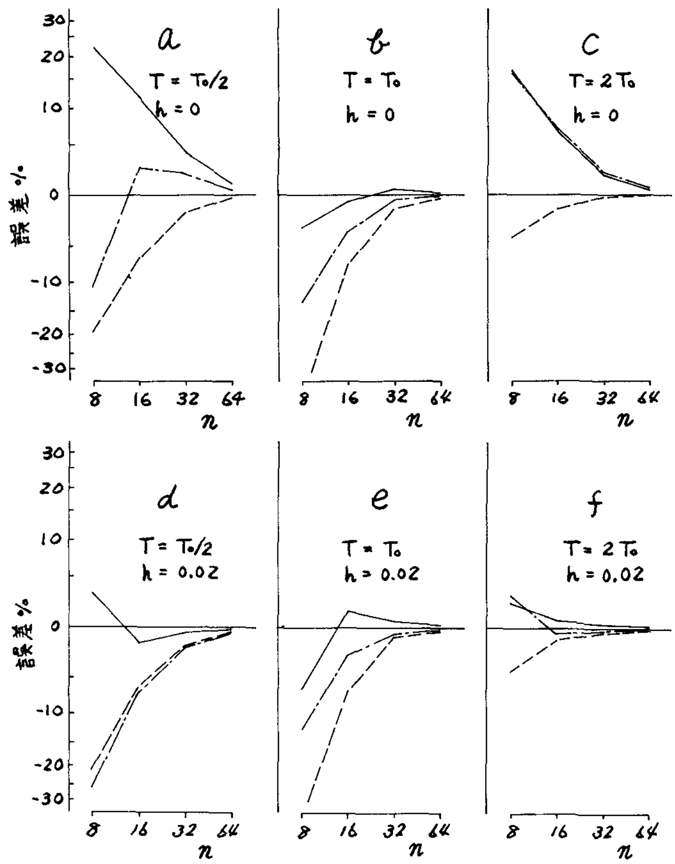

図-2 理論解に対する誤差（絶対最大値）

——— 差分法
—·—· 線形加速度法
– – – – ルンゲ・クッター法

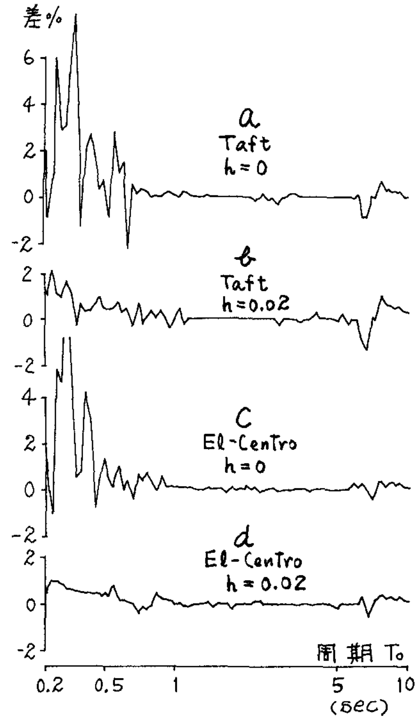

図-3 ルンゲ・クッター法に対する差分法の差

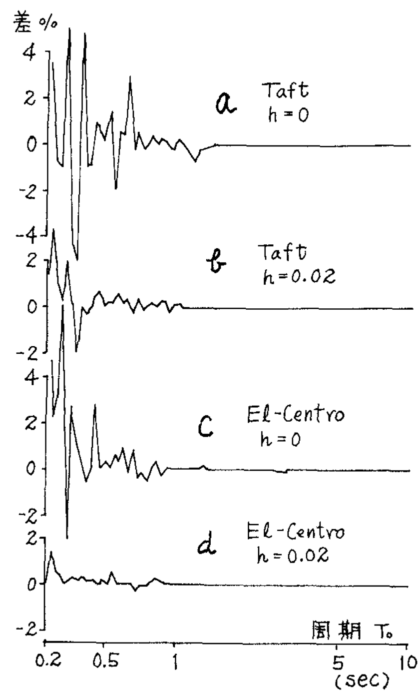

図-4 ルンゲ・クッター法に対する線形加速度法の差

が小さくなることが観察される。〈その4〉T_0に対するTの大小は，誤差に明らかな傾向を生じさせる。

図3，4は応答スペクトルの値をルンゲ・クッター法を基準して同様に示したものである。T_0が小さい程差が大きくなり，差分法では正の差を示し，減衰が差を小さくする，等がうかがわれる。また差の大小とT_0との相関性が$T_0<0.9\sim1$ において特に明確では無い。しかしながら，$T_0>0.9\sim1$ においては差分法での$T_0>7$（図-3）を除けば，差がほとんど0に近い。このことは，0.01秒の時間キザミから考えればnが90～100であることになり，図-2における結果とほぼ対応がつく。

以上述べてきた如く，動的問題における数値計算法の精度に関しては，構造物と入力の相互の周波数特性が重要となり，必ずしも常にルンゲ・クッター法が差分法よりも良い精度を示すとは限らない。しかしながら，ここでの結果は一計算例から得られたに過ぎず，さらに何らかの理論的裏づけが望まれることは言うまでもなく，また本報告の解析方法が数多くのこれまでのこの種の研究成果にもとづいたものでもない。ご高読いただいた諸兄からのご意見ご批判を期待する。