

I-17

ウラソフの方法によるトラス橋の解析

桜田機械工業株式会社 正会員 鈴木 康弘

〃 〃 〇岡村 忠夫

薄肉断面梁は 1) 変形後も断面形状は保持される, 2) 断面形状の法則に従う Warping (反り) を生ずる, という仮定に基づいた, いわゆる曲げ振れ理論によって解析される. 東北高速道路利根川橋は図-1 に示すように, 3 主構連続トラス橋であるが, これを図-2 に示すようにモデル化して 2 室閉断面薄肉梁とみなすことができる. ただし, このようなトラス橋の場合は上記 1) の仮定は完全に適用しがたい. そこで 1) の仮定を捨てた場合の解析法として, 特に閉断面薄肉梁に対して有用なウラソフの方法を応用してみた.

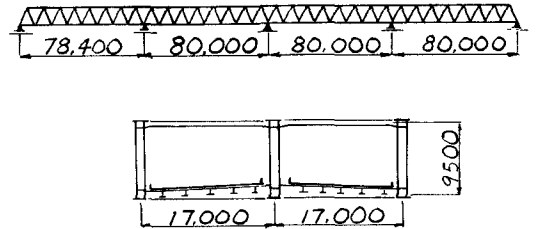


図-1 東北高速道路 利根川橋

1. ウラソフの解法

ウラソフの基本方程式は (参考文献 9 4 章 参照)

$$\left. \begin{aligned} \gamma \sum_i a_{ji} U_i'' - \sum_k b_{jk} U_k - \sum_l c_{jl} V_l' + \frac{P_j}{G} &= 0 \\ \sum_k c_{hk} U_k + \sum_l v_{hl} V_l'' - \gamma \sum_m \delta_{hm} V_m + \frac{Q_h}{G} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1a, b)$$

($i, j = 1, 2, \dots, m$) ($k, h = 1, 2, \dots, n$)

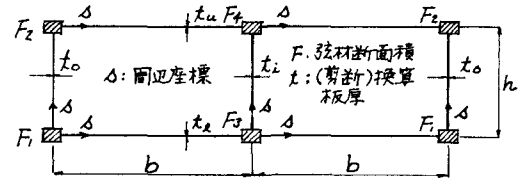


図-2 換算断面モデル

ここで U_n ($n = 1, 2, \dots, m$), V_k ($k = 1, 2, \dots, n$) は解かれるべき未知一般変位であり, m, n は切断面の自由度である. U, m は切断面外への, V, n は切断面内の変位に対応する.

(1) 式の係数は 次の式で与えられる.

$$\left. \begin{aligned} a_{ji} &= \int \varphi_i \varphi_n dF & b_{jk} &= \int \varphi_j' \varphi_k' dF & c_{jl} &= \int \varphi_j' \varphi_l dF & c_{hk} &= \int \varphi_h \varphi_k' dF \\ v_{hl} &= \int \psi_h \psi_l dF & \delta_{hm} &= \frac{1}{E} \int \frac{M_h M_m}{EJ} ds & \gamma &= E/G \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

φ_n, ψ_k は互に独立な一般座標関数系で, 既知である. (変位の物理的意味を考慮して, 連続性と独立性に注意して任意に決めることができる). 断面上の任意点の変位は

$$\left. \begin{aligned} u(x, s) &= \sum_{i=1}^m U_i(x) \varphi_i(s) \\ v(x, s) &= \sum_{k=1}^n V_k(x) \psi_k(s) \end{aligned} \right\} \quad (3a, b)$$

で与えられる. (1) 式中の一般化された外力 P_j, Q_h は P, Q と x, s 方向の表面接線荷重として

$$\left. \begin{aligned} P_j &= \int P \varphi_j ds & Q_h &= \int Q \psi_h ds \end{aligned} \right\} \quad (4a, b)$$

($j = 1, 2, \dots, m$) ($h = 1, 2, \dots, n$)

さらに, 一般化された断面力は次式で与えられる.

$$\left. \begin{aligned} P_j(x) &= E \sum_{i=1}^m a_{ij} U_i' & Q_h(x) &= G \left(\sum_{i=1}^m c_{hi} U_i + \sum_{k=1}^n v_{hk} V_k \right) \end{aligned} \right\} \quad (5a, b)$$

($j = 1, 2, \dots, m$) ($h = 1, 2, \dots, n$)

2 利根川橋への応用(座標関数の設定, 基本方程式)

図-2 に示すような断面では, x 方向の変位に対して $m=6$ (節点数) の自由度を有する。切断断面内の変位に対しては, 節要素間の伸びはないものとする。 $m=2m-C=5$ (C は部材数-拘束条件数) で, 合計 11 の自由度を有する。一般座標 φ_i は, 最も簡単な考え方としては, 各節点で 1, その節点に集まる部材(壁)の他端でゼロに直線変化する m 個の関数系を選び, ψ_k としては m 個の部材に, 次々に 1 の x 方向の変位を与えた時の変位状態図をとることができる。ここではこれらの関数系を組み合わせ, (1) 式の積分に便利のように直交性をもたせるため, 図-3 のように設定した。 φ_1 は全断面一様伸び, $(\varphi_3, \varphi_1), (\varphi_4, \varphi_2)$ はそれぞれ 外主構, 中主構の鉛直曲げに対応する。 φ_2 は他の φ_i との直交性から導かれたもので, 特殊な変位状態に対応する。 (φ_5, φ_6) は断面の変形を含めたねじれ状態に, (φ_5, φ_6) は水平曲げ変位状態に対応する。(これらの座標関数の選ぶ方は (1) 式の積分の難易に関係するだけで, 最終解には影響を与えない)。

(2) 式が基本方程式の係数を取る整理すると, 一様伸びと, 表 1, 2 に示すような 対称, 逆対称に分離されてくる。各壁は剪断応力しかうけないうと仮定しているのだから, (2) 式の積分領域に注意する必要がある。なお,

(1)-b 式の σ の項は各壁の面内曲げ(フレーム効果)に対応しているが, 別の数値計算例(単純梁としてのフーリエ級数解)から, 影響が小さいので, 以下の解析法では無視した。ここで $D = d/dx$ である

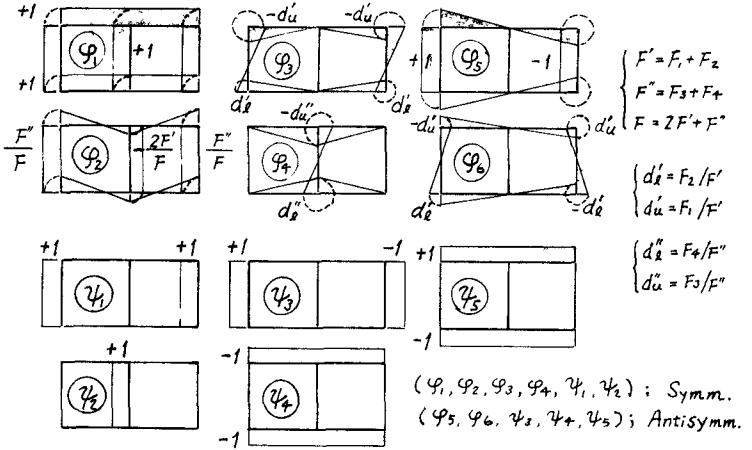


図-3 一般座標関数 φ_i, ψ_k

(i) 軸方向伸び変形

(1) $a_0 U_1'' = -P_1/q$

(ii) 対称変形

表-1

	U_2	U_3	U_4	V_1	V_2	荷重項
(2)	$a_1 D^2 - b_3$	$-b_6$	$-b_8$			$= -P_2/q$
(3)	$-b_6$	$a_2 D^2 - (b_1 + b_7)$	$-b_{10}$	$h b_1 D$		$= -P_3/q$
(4)	$-b_8$	$-b_{10}$	$a_3 D^2 - (b_2 + b_9)$		$h b_2 D$	$= -P_4/q$
(5)		$-h b_1 D$		$h^2 b_1 D^2$		$= -g_1/q$
(6)			$-h b_2 D$		$h^2 b_2 D^2$	$= -g_2/q$

(iii) 反対称変形

表-2

	U_5	U_6	V_3	V_4	V_5	荷重項
(7)	$a_4 D^2 - b_3$	$-b_6$		$-b b_3 D$	$-b b_4 D$	$= -P_5/q$
(8)	$-b_6$	$a_2 D^2 - (b_1 + b_7)$	$h b_1 D$	$-b b_6 D$	$-b b_5 D$	$= -P_6/q$
(9)		$-h b_1 D$	$h^2 b_1 D^2$			$= -g_3/q$
(10)	$b b_3 D$	$b b_6 D$		$b^2 b_3 D^2$	$b^2 b_4 D^2$	$= -g_4/q$
(11)	$b b_4 D$	$b b_5 D$		$b^2 b_4 D^2$	$b^2 b_3 D^2$	$= -g_5/q$

$F_2 = 2F_1 + F_3$ $F_4 = 2F_2 + F_4$

$a_1 = \gamma \frac{2 F_1 F''}{F}$ $a_0 = \delta F$
 $a_2 = \gamma \frac{2 F_2 F''}{F}$
 $a_3 = \gamma \frac{2 F_3 F''}{F}$
 $a_4 = \gamma \frac{2 F_4 F''}{F}$

$T_0 = 2x_0/h$ $T_2 = t_2/h$
 $T_u = 2x_u/b$ $T_t = 2t_u/b$

$b_1 = T_0$ $b_2 = T_t$

$b_3 = T_t + T_u$

$b_4 = T_t - T_u$

$b_5 = (F_2 T_t + F_1 T_u)/F'$

$b_6 = (F_2 T_t - F_1 T_u)/F'$

$b_7 = (F_1^2 T_t + F_2^2 T_u)/F'^2$

$b_8 = -(F_4 T_t - F_3 T_u)/F''$

$b_9 = (F_4^2 T_t + F_3^2 T_u)/F''^2$

$b_{10} = -(F_3 F_4 T_t + F_1 F_2 T_u)/F' F''$

3. 還元法形式の解

変断面として解析するための還元法タイプの解を求める。まず表1, 2を直接積分してフィールドマトリックスを求める。
基本力学量としては、一般化された変位、および一般化された断面力をとると表-3, 4のようになる。この場合
ラプラス変換を利用して、積分定数は各力学量の初期値で表わしておくことと便利である。

表-3 対称変形状態の伝達マトリックス

	U_1^0	U_2^0	U_3^0	U_4^0	P_1^0/E	P_2^0/E	P_3^0/E	P_4^0/E	hV_1^0	hV_2^0	Q_1^0/q_h	Q_2^0/q_h	g_1/hq	g_2/hq
$U_1(x)$	1	0	0	0	x/F	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$U_2(x)$	0	$a_1 \bar{x}_1'$	$a_2 \bar{x}_4'$	$a_3 \bar{x}_5'$	0	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_4$	$\bar{x}_5$	0	0	$-\bar{x}_7$	$-\bar{x}_8$	$\bar{x}_7$	$\bar{x}_8$
$U_3(x)$	0	$a_1 \bar{x}_4'$	$a_2 \bar{x}_2'$	$a_3 \bar{x}_6'$	0	$\bar{x}_4$	$\bar{x}_2$	$\bar{x}_6$	0	0	$-\bar{x}_9' - \frac{1}{T_0}$	$-\bar{x}_{10}'$	$\bar{x}_9' + \frac{x}{T_0}$	$\bar{x}_{10}'$
$U_4(x)$	0	$a_1 \bar{x}_5'$	$a_2 \bar{x}_6'$	$a_3 \bar{x}_3'$	0	$\bar{x}_5$	$\bar{x}_6$	$\bar{x}_3$	0	0	$-\bar{x}_{10}'$	$-\bar{x}_{11}' - \frac{1}{T_2}$	$\bar{x}_{10}'$	$\bar{x}_{11}' + \frac{x}{T_2}$
$P_1(x)/E$	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$P_2(x)/E$	0	$a_1' \bar{x}_1''$	$a_1 a_2 \bar{x}_4''$	$a_1 a_3 \bar{x}_5''$	0	$a_1 \bar{x}_1'$	$a_1 \bar{x}_4'$	$a_1 \bar{x}_5'$	0	0	$-a_1 \bar{x}_4$	$-a_1 \bar{x}_5$	$a_1 \bar{x}_7$	$a_1 \bar{x}_8$
$P_3(x)/E$	0	$a_1 a_2 \bar{x}_2''$	$a_2' \bar{x}_2''$	$a_2 a_3 \bar{x}_6''$	0	$a_2 \bar{x}_4'$	$a_2 \bar{x}_2'$	$a_2 \bar{x}_6'$	0	0	$-a_2 \bar{x}_2$	$-a_2 \bar{x}_6$	$a_2 (\bar{x}_9' + \frac{1}{T_0})$	$a_2 \bar{x}_{10}'$
$P_4(x)/E$	0	$a_1 a_3 \bar{x}_3''$	$a_2 a_3 \bar{x}_6''$	$a_3' \bar{x}_3''$	0	$a_3 \bar{x}_5'$	$a_3 \bar{x}_6'$	$a_3 \bar{x}_3'$	0	0	$-a_3 \bar{x}_6$	$-a_3 \bar{x}_3$	$a_3 \bar{x}_{10}'$	$a_3 (\bar{x}_{11}' + \frac{1}{T_2})$
$hV_1(x)$	0	$a_1 \bar{x}_4$	$a_2 \bar{x}_2$	$a_3 \bar{x}_6$	0	$\bar{x}_7$	$\bar{x}_9' + \frac{1}{T_0}$	$\bar{x}_{10}'$	1	0	$-\bar{x}_9'$	$-\bar{x}_{10}'$	$\bar{x}_9$	$\bar{x}_{10}$
$hV_2(x)$	0	$a_1 \bar{x}_5$	$a_2 \bar{x}_6$	$a_3 \bar{x}_3$	0	$\bar{x}_8$	$\bar{x}_{10}'$	$\bar{x}_{11}' + \frac{1}{T_2}$	0	1	$-\bar{x}_{10}'$	$-\bar{x}_{11}'$	$\bar{x}_{10}$	$\bar{x}_{11}$
$Q_1(x)/q_h$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	$-x$	0
$Q_2(x)/q_h$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	$-x$

$$\begin{aligned}
 \bar{x}_1 &= d_0 x + \frac{1}{a_1} \left(\frac{H_1}{\lambda_1^2} S_1 + \frac{T_0}{\lambda_1^2} S_2 \right) & \bar{x}_2 &= \frac{1}{a_2} x + \frac{1}{r} \left(\frac{H_2}{2F_1} \frac{S_1}{\lambda_1} + \frac{M_0}{2F_2} \frac{S_2}{\lambda_2} \right) & \bar{x}_3 &= \frac{1}{a_3} x + \frac{1}{r} \left(\frac{H_3}{F_3} \frac{S_1}{\lambda_1} + \frac{M_0}{F_4} \frac{S_2}{\lambda_2} \right) \\
 \bar{x}_4 &= d_0 x + \frac{1}{a_1} \left(\frac{H_1}{\lambda_1} S_1 + \frac{M_0}{\lambda_1} S_2 \right) & \bar{x}_5 &= d_0 x - \frac{1}{a_1} \left(\frac{H_1}{\lambda_1} S_1 - \frac{H_2}{\lambda_2} S_2 \right) & \bar{x}_6 &= \frac{1}{a_2} x - \frac{1}{r} \left(\frac{1}{F_2} \frac{S_1}{\lambda_1} + \frac{1}{F_4} \frac{S_2}{\lambda_2} \right) \\
 \bar{x}_7 &= -\frac{d_1}{a_1} x + d_0 \frac{x^2}{2} + \frac{1}{a_1} \left(\frac{H_1}{\lambda_1} S_1 - \frac{M_0}{\lambda_1^2} S_2 \right) & \bar{x}_8 &= \frac{d_2}{a_1} x + d_0 \frac{x^2}{2} - \frac{1}{a_1} \left(\frac{H_1}{\lambda_1} S_1 - \frac{M_0}{\lambda_1^2} S_2 \right) & \bar{x}_9 &= -d_4 \left(-\frac{1}{T_0} + d_5 \right) \frac{x^2}{2} + \frac{1}{a_2} \frac{x^2}{24} + \frac{1}{r} \left(\frac{H_2}{2F_1} \frac{C_1}{\lambda_1^2} + \frac{M_0}{2F_2} \frac{C_2}{\lambda_2^2} \right) \\
 \bar{x}_{10} &= d_7 + d_4 \frac{x^2}{2} + \frac{1}{a_2} \frac{x^2}{24} - \frac{1}{r} \left(\frac{1}{F_2} \frac{C_1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{F_4} \frac{C_2}{\lambda_2^2} \right) & \bar{x}_{11} &= -d_8 - \left(\frac{1}{T_2} + d_5 \right) \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{24} + \frac{1}{r} \left(\frac{H_3}{F_3} \frac{C_1}{\lambda_1^2} + \frac{M_0}{F_4} \frac{C_2}{\lambda_2^2} \right) \\
 d_0 &= \pi/a & d_1 &= \frac{H_1}{\lambda_1^2} - \frac{M_0}{\lambda_1^2} & d_2 &= \frac{H_1}{\lambda_1^2} - \frac{H_2}{\lambda_2^2} & d_3 &= \frac{H_2}{\lambda_2^2} - \frac{M_0}{T_0} & d_4 &= \frac{H_1 H_2}{T_2} + \frac{M_0 H_4}{T_4} & d_5 &= \frac{H_1^2}{T_2} + \frac{H_2^2}{T_4} & d_6 &= \frac{H_1^2}{T_2} \frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{M_0^2}{T_4} \frac{1}{\lambda_2^2} \\
 d_7 &= \frac{H_1 H_2}{T_2} \frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{H_1 H_4}{T_4} \frac{1}{\lambda_2^2} & d_8 &= \frac{H_1^2}{T_2} \frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{H_2^2}{T_4} \frac{1}{\lambda_2^2} & \mu_1 &= 2F_1/F_2 & \mu_2 &= 2F_1/F_4 & \mu_3 &= F_3/F_2 & \mu_4 &= F_4/F_4 \\
 \lambda_1^2 &= \frac{1}{2\sigma} \frac{F_2}{F_1} T_2 & \lambda_2^2 &= \frac{1}{2\sigma} \frac{F_4}{F_1} T_4 & C_1 &= \cosh \lambda_1^2 & S_1 &= \sinh \lambda_1^2 & \pi &= \frac{1}{F_2} (F_1 F_4 - F_2 F_3)
 \end{aligned}$$

次に不連続点での変換マトリックス（ポイントマトリックス）は、まず変位の連続性、次に断面力に対しては仮想仕事の原理を適用して、次のように求まる。（対称変形状態の場合）

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}_r = \begin{bmatrix} 1 & \Delta(\frac{F_1}{F}) & \{1 - (\frac{F_1}{F})_r\} \{(\frac{F_2}{F})_r - (\frac{F_3}{F})_r\} & (\frac{F_1}{F})_r \{(\frac{F_2}{F})_r - (\frac{F_3}{F})_r\} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \Delta(\frac{F_2}{F}) & -\Delta(\frac{F_3}{F}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}_l$$

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix}_r = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\Delta(\frac{F_1}{F}) & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\{1 - (\frac{F_1}{F})_r\} \Delta(\frac{F_2}{F}) & -\Delta(\frac{F_3}{F}) & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -(\frac{F_1}{F})_r \Delta(\frac{F_2}{F}) & \Delta(\frac{F_3}{F}) & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix}_l$$

$\Delta = l - r$

表-4 逆対称変形状態の伝達マトリックス

	U_5°	U_6°	hV_5°	$2bV_6^\circ$	$2bV_5^\circ$	P_5°/E	P_6°/E	$Q_5^\circ/4h$	$Q_6^\circ/2qb$	$Q_5^\circ/2qb$	$Q_6^\circ/4h$	$g_5/2qb$	$g_6/2qb$
$U_5(x)$	1	0	0	0	0	$\bar{\varphi}_1'$	0	0	$2\bar{\varphi}_1$	0	0	$-2\bar{\varphi}_1$	0
$U_6(x)$	0	1	0	0	0	$\bar{\varphi}_2'$	$-\bar{\varphi}_2'$	$-n\bar{\varphi}_2'$	$\bar{\varphi}_2'$	$\bar{\varphi}_2'$	$n\bar{\varphi}_2'$	$-\bar{\varphi}_2'$	$-\bar{\varphi}_2'$
$hV_5(x)$	0	x	1	0	0	$\bar{\varphi}_2'$	$-\bar{\varphi}_2 + \frac{x}{b_1}$	$-n\bar{\varphi}_2$	$\bar{\varphi}_2$	$\bar{\varphi}_2 - \frac{x}{b_1}$	$n\bar{\varphi}_2$	$-\bar{\varphi}_2$	$-\bar{\varphi}_2$
$2bV_6(x)$	$-2x$	πx	0	1	0	$-2\bar{\varphi}_1$	$n\bar{\varphi}_2'$	$-n\bar{\varphi}_2$	$-\bar{\varphi}_2 + d_1x$	$\bar{\varphi}_2 + d_1x$	$n\bar{\varphi}_2$	$\bar{\varphi}_2 - d_1x$	$-\bar{\varphi}_2 - d_1x$
$2bV_5(x)$	0	$-x$	0	0	1	$-\bar{\varphi}_2'$	$\bar{\varphi}_2$	$\bar{\varphi}_2 + d_2x$	$-\bar{\varphi}_2 + d_1x$	$-\bar{\varphi}_2$	$-\bar{\varphi}_2 - d_2x$	$\bar{\varphi}_2 - d_1x$	$\bar{\varphi}_2 - d_1x$
$P_5(x)/E$	0	0	0	0	0	1	0	0	$2x$	0	0	-2	0
$P_6(x)/E$	0	0	0	0	0	0	1	$-x$	$-nx$	x	x	nx	$-x$
$Q_5(x)/4h$	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	-1	0	0
$Q_6(x)/2qb$	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	-1	0
$Q_5(x)/2qb$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	-1

$$n = \frac{F_1 - F_2}{F_1 + F_2}$$

$$d_1 = \frac{1}{t_2} + \frac{1}{t_4}$$

$$d_2 = \frac{1}{t_2} - \frac{1}{t_4}$$

$$\bar{\varphi}_1 = \frac{1}{d_4} \cdot \frac{x^2}{2}$$

$$\bar{\varphi}_2 = \frac{1}{d_2} \cdot \frac{x^3}{6}$$

逆対称変形の場合には、中主構は無関係となる。即ち通常の2主構トラスの場合の解と全く同じである。
以上のフリードマトリックスとポイントマトリックスを用いて、伝達マトリックスの手法により、全ての力学量を求めることができる。即ち

$$Q = (U, V, P, Q)^T$$

$$0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad \dots \quad n \quad n+1 \quad \dots \quad L$$

$$Q_L = F_L \dots F_{R+1} P_R F_R \dots F_n \dots F_2 P_1 F_1 Q_0$$

始端と終端の境界条件、中間支点での拘束条件によって、上式中に現われる未知力学量は決定される。

以上の手法は吊橋の補剛トラス、トラス補剛桁と有する斜張橋、あるいは境界条件と弦材単位で与えられた場合に適用できると考えられる。

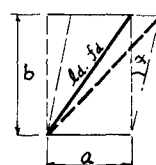
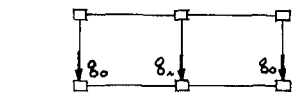
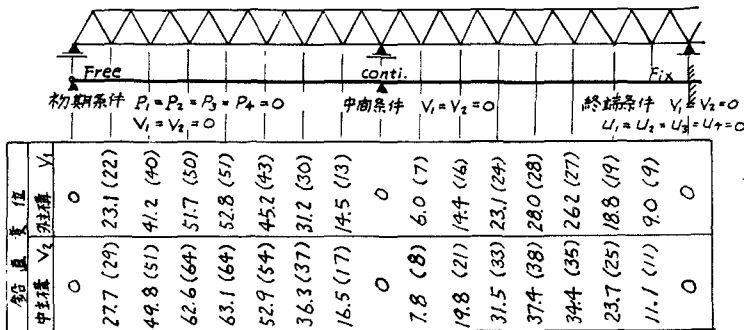
4) 数値計算例

主構の斜材、上横構、下横構を等価なせん断剛性をもつ薄板に換算した。

荷重は床版打設時荷重と考へて、対称等分布荷重 ($q_0 = 4.024 \text{ t/m}$, $g_2 = 7.601 \text{ t/m}$) について計算した結果を下図に示す。断面は格受間の半分の長さ (斜材) 毎に変断面としたが、全体の長は実際の橋長の半分に与へて考え、中央で固定と考へた。

伝達マトリックス法では、数値の桁落ちが問題になるが、フリードマトリックスが超越関数も含む、複雑な形をしているにもかかわらず、この計算例では解の残差は少なく、十分な精度が得られた。

下の計算結果では単主構トラスとしての計算結果 (変形法による) と比較して、中主構では減カシ、外主構では増カシが著しい。これは上記解析法によって取り入れられた上下横構の効果である。



換算板厚

$$t = \left(\frac{E}{G} \right) \frac{abf_0}{L^3}$$

(ダブル材料の場合)
は 2 倍

(内)は単主構としての計算値