

I — 4 開断面薄肉ばりの曲げねじれ振動波の伝播に関する基礎的考察

山梨大学工学部 正員 深沢 泰晴
山梨大学大学院 学生員 ○太田 貞次

1. はじめに

薄肉ばりにそのせん断中心を通らない衝撃力が作用した場合に生ずるような sharp transient な曲げねじれ振動現象の解明には、いわゆる Wagner の Unit Warping の仮定を用いた慣用の曲げねじれ理論に基づく振動解析では満足な結果は得られない。何故なるば、その解においては、短波長波は伝播速度が無限大となり、振動波は発散現象を呈してしまうからである。

この欠陥を補うため、Aggarwal & Cranch は薄肉ばりの曲げねじれ振動にも Timoshenko Beam Theory の拡張を試み、I および C 断面ばりの曲げねじれ振動波の伝播の問題を論じた¹⁾。また深沢は任意形状の多角薄肉開断面のばりに対しても同様な解析が可能であることを一般的な形で示した²⁾。しかしながら、個々の構成板帯断面の平均せん断変形を未知関数とする両者の解法には、板帯数が多くなると計算が非常に煩雑になること、また曲線形状のような任意形状の薄肉断面ばりには適用できないことの二つの欠点がある。

そこで著者等は薄肉開断面の場合、曲げおよび反りによるせん断ひずみとも、断面の薄肉中心線に沿った分布は、一般に著しい変動を示さない点に着目し、薄肉中心線の全長にわたっての平均せん断変形を用いることによって問題の解析を行なった。ここではその解析の基礎となる任意形状の薄肉開断面の曲げねじれについて、曲げおよび反り拘束に伴うせん断変形を考慮した静的つりあいの微分方程式なるがにそれに基づく振動問題の微分方程式の誘導の過程の概略を記す。

2. 曲げおよび反りせん断変形を考慮した静的平衡方程式

図-1 に示すように、薄肉開断面ばりが荷重 $q_x^*, q_y^*, m_x^*, m_y^*, m_z^*, m_w^*$ の作用を受けるとき、断面力 $Q_x^*, Q_y^*, M_x, M_y, T_s^* (St. Venant のねじりモーメント), T_w^* (反り拘束ねじりモーメント), M_w^* (反り拘束バイモーメント)$ との間には、ばりの微小部分に作用する力のつりあい条件から次式が成り立つ；

$$\left. \begin{aligned} Q_x^{*'} + q_x^* &= 0, & Q_y^{*'} + q_y^* &= 0 \\ M_x^{*'} - Q_y^* + m_x^* &= 0, & M_y^{*'} - Q_x^* + m_y^* &= 0 \\ (T_s^* + T_w^*)' + m_z^* &= 0, & M_w^{*'} - T_w^* + m_w^* &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots (1) a-f$$

ここにダッシュは z に関する微分を意味し、*印はせん断中心に関する量であることを表わす。

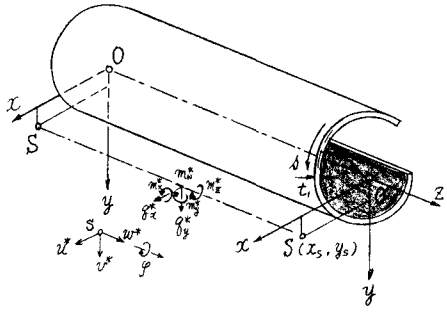


図-1 開断面薄肉ばりの一般図

断面上の任意点 $P(x, y)$ の変位 $\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}$ をせん断中心 $S(x_s, y_s)$ の変位 u^*, v^*, w^* で表わすと、
 $\tilde{u} = u^* - (y - y_s) \varphi, \quad \tilde{v} = v^* + (x - x_s) \varphi, \quad \tilde{w} = -y \varphi_x^* - x \varphi_y^* - w^* \varphi^* \dots \dots (2) a-c$
ここに、 φ_x^*, φ_y^* は x, y 軸まわりの断面の回転角、 $\varphi^* = \varphi^*(z)$ はねじり率 φ' に代わる新しい関数である。式(2)c および M_x, M_y, M_w の定義式を用いて、任意点 P における垂直応力 σ_z およびせん断応力 τ_{zx} を求めると、

$$\sigma_z = E \epsilon_z = \frac{M_x}{J_x} y + \frac{M_y}{J_y} x + \frac{M_w}{C_w} w^*, \quad \tau_{zx} = G \gamma_{zx} = \frac{T_s^*}{J_T} \cdot 2x - \frac{1}{x} \left(\frac{Q_y^*}{J_y} S_y + \frac{Q_x^*}{J_x} S_x + \frac{T_w^*}{C_w} S_w^* \right) \dots (3) a,b$$

ここに、 $S_x = \int_0^A y x dA, \quad S_y = \int_0^A x y dA, \quad S_w^* = \int_0^A w^* x dA$

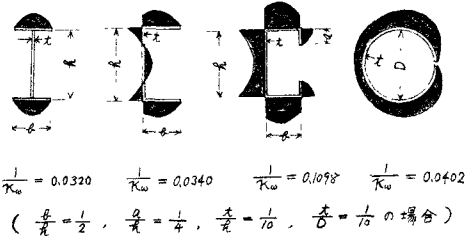
断面力と変形との関係式は仮想仕事の原理： $\delta(\pi_i + \pi_a + \pi_n) = 0 \dots \dots (4)$ によって定まる。式(4)において、 $\delta \pi_i (= \iint (\epsilon_x \delta \sigma_x + \gamma_{zx} \delta \tau_{zx}) dF dz)$ ：内的仮想仕事、 $\delta \pi_a$ ：外的

仮想仕事, $\delta \Pi_w (= \sum_{i=1}^5 G_i \lambda_i)$: 附帯条件の項で G_i としては式(1)_{a-f}を課する。Lagrange の乗数 λ_i は式(4)の境界項が消失する条件より定まり, $\lambda_1 = U^*$, $\lambda_2 = V^*$, $\lambda_3 = -\psi_x^*$, $\lambda_4 = -\psi_y^*$, $\lambda_5 = \varphi$, $\lambda_6 = -\vartheta^*$ となる。結局式(4)はつぎのようになる;

$$\delta \Pi = \int_0^L \left\{ \frac{M_x \delta M_x}{E J_x} + \frac{M_y \delta M_y}{E J_y} + \frac{M_w \delta M_w}{E C_w} + \frac{T_x^* \delta T_x^*}{G J_x^*} + \frac{Q_x^* \delta Q_x^*}{\kappa_x G F} + \frac{Q_y^* \delta Q_y^*}{\kappa_y G F} + \frac{T_w^* \delta T_w^*}{\kappa_w G J^*} - U^{*'} \delta Q_x^* - V^{*'} \delta Q_y^* \right. \\ \left. + \psi_x^{*'} \delta M_x + \psi_y^{*'} \delta M_y + \psi_z^{*'} \delta M_z + \psi_z^* \delta Q_x - \varphi' \delta (T_x^* + T_w^*) + \vartheta^{*'} \delta M_w + \vartheta^* \delta T_w^* \right\} dz = 0 \quad (5)$$

ここに, κ_x, κ_y は曲げせん断補正係数, κ_w は反りせん断補正係数を意味し, 次式で表わされる;

$$\frac{1}{\kappa_x} = \frac{F}{J_x} \int_F \frac{S_x^2}{x^2} dF, \quad \frac{1}{\kappa_y} = \frac{F}{J_y} \int_F \frac{S_y^2}{y^2} dF, \quad \frac{1}{\kappa_w} = \frac{J^*}{C_w} \int_F \frac{S_w^2}{x^2} dF$$



式(5)から変分原理により

$$\left. \begin{aligned} Q_x^* &= \kappa_x G F (U^{*'} - \psi_z^{*'}) \\ M_x &= -E J_x \psi_x^{*'} \\ T_w^* &= \kappa_w G J^* (\varphi' - \vartheta^{*'}) \\ M_w^* &= -E C_w \vartheta^{*'} \end{aligned} \right\} \dots (6)_{a-c}$$

$$\left. \begin{aligned} Q_x^* &= \kappa_x G F (U^{*'} - \psi_z^{*'}) \\ M_x &= -E J_x \psi_x^{*'} \\ T_x^* &= G J_x^* \varphi' \\ T_w^* &= \kappa_w G J^* (\varphi' - \vartheta^{*'}) \\ M_w^* &= -E C_w \vartheta^{*'} \end{aligned} \right\} \dots (7)_{a-g}$$

式(7)を式(1)に代入し, 曲げおよび反り拘束に伴なうせん断変形を考慮した静的つりあいの微分方程式が得られる;

$$\left. \begin{aligned} \kappa_x G F (U^{*''} - \psi_z^{*''}) + \vartheta_z^{*'} &= 0, & \kappa_x G F U^{*''} + E J_y \psi_y^{*''} - \kappa_x G F \psi_z^{*'} - M_z^{*'} &= 0 \\ \kappa_y G F (V^{*''} - \psi_x^{*''}) + \vartheta_x^{*'} &= 0, & \kappa_y G F V^{*''} + E J_x \psi_x^{*''} - \kappa_y G F \psi_z^{*'} - M_z^{*'} &= 0 \\ (1 + \kappa_w) G J^* \varphi'' - \kappa_w G J^* \vartheta^{*''} + M_z^{*'} &= 0, & \kappa_w G J^* \varphi' + E C_w \vartheta^{*''} - \kappa_w G J^* \vartheta^{*'} - M_w^{*'} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots (8)_{a-f}$$

これは3組の連立式であり, 第1組および第2組の微分方程式はそれぞれ x 軸および y 軸まわりの曲げに関するものであり, 第3組は反り拘束に伴なうせん断変形を考慮した場合の曲げねじれに関する微分方程式である。

3. 曲げおよび反り拘束に伴なうせん断変形を考慮した振動方程式

問題の振動方程式は静的つりあいの微分方程式(8)の荷重項を振動時における慣性力で置き換えることによって得られる。薄肉中心線 A の単位長さあたりの慣性力を p_x, p_y, p_z とすると式(2)を考慮して,

$$\left. \begin{aligned} q_x^* &= \int_L p_x ds = -\rho F \left(\frac{\partial^2 U^*}{\partial x^2} + y_A \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right), & q_y^* &= \int_L p_y ds = -\rho F \left(\frac{\partial^2 V^*}{\partial x^2} - x_A \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right) \\ m_x^{*'} &= \int_L p_x y ds = \rho J_y \frac{\partial^2 \psi_x^*}{\partial x^2}, & m_y^{*'} &= \int_L p_y x ds = \rho J_x \frac{\partial^2 \psi_y^*}{\partial x^2}, & m_z^{*'} &= \int_L p_z \omega ds = \rho C_w^* \frac{\partial^2 \vartheta^*}{\partial x^2} \\ m_z^{*'} &= \int_L \{ p_x (x - x_A) - p_y (y - y_A) \} ds = -\rho F \left(y_A \frac{\partial^2 U^*}{\partial x^2} - x_A \frac{\partial^2 V^*}{\partial x^2} + I^{*2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right) \end{aligned} \right\} \dots (9)_{a-f}$$

ここに, ρ は材料の密度, I^{*2} は次式で与えられる;

$$I^{*2} = \frac{1}{F} \int_L \{ (x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 \} ds$$

結局式(9)を式(8)に代入して, 曲げおよび反り拘束に伴なうせん断変形を考慮した振動方程式が得られる;

$$\left. \begin{aligned} \kappa_x G F \left(\frac{\partial^2 U^*}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi_z^*}{\partial x^2} \right) - \rho F \left(\frac{\partial^2 U^*}{\partial x^2} + y_A \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right) &= 0, & \kappa_x G F \frac{\partial^2 U^*}{\partial x^2} + E J_y \frac{\partial^2 \psi_y^*}{\partial x^2} - \kappa_x G F \psi_z^{*'} - \rho J_y \frac{\partial^2 \psi_x^*}{\partial x^2} &= 0 \\ \kappa_y G F \left(\frac{\partial^2 V^*}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi_x^*}{\partial x^2} \right) - \rho F \left(\frac{\partial^2 V^*}{\partial x^2} - x_A \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right) &= 0, & \kappa_y G F \frac{\partial^2 V^*}{\partial x^2} + E J_x \frac{\partial^2 \psi_x^*}{\partial x^2} - \kappa_y G F \psi_z^{*'} - \rho J_x \frac{\partial^2 \psi_y^*}{\partial x^2} &= 0 \\ (1 + \kappa_w) G J^* \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \kappa_w G J^* \frac{\partial^2 \vartheta^*}{\partial x^2} - \rho F \left(y_A \frac{\partial^2 U^*}{\partial x^2} - x_A \frac{\partial^2 V^*}{\partial x^2} + I^{*2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right) &= 0, & \kappa_w G J^* \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + E C_w^* \frac{\partial^2 \vartheta^*}{\partial x^2} - \kappa_w G J^* \vartheta^{*'} - \rho C_w^* \frac{\partial^2 \vartheta^*}{\partial x^2} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots (10)_{a-f}$$

この微分方程式系においては, 6ヶの方程式がすべて連成しているが, 2軸対称断面の場合には $x_A = y_A = 0$ であるから, それぞれ2ヶの微分方程式よりなる3組の方程式系に分解され, また1軸対称断面であれば2ヶの微分方程式からなる方程式系と4ヶの微分方程式からなる方程式系に分かれる。

代表的な4種の薄肉開断面について, 反りせん断補正係数 κ_w の計算結果を S_w -図とともに図-2に示す。曲げねじれ振動における自由振動波の伝播に関する具体的計算結果については, 講演会当日報告する予定である。

参考文献 1) Aggarwal, H.R. & E.T. Cranch: Journal of Applied Mechanics, June, 1967.
2) 深沢泰晴: 土木学会学術講演会概要集, 昭48-10. 3) Heilig, R.: Der Stahlbau, April, 1961.