

山梨大学工学部 正員 深沢泰晴

山梨大学大学院 学生員 河面晴征

1. はじめに

薄肉ばりの曲げねじれ理論においては、断面の反りの断面内分布は *Saint Venant* のねじりによる反りに比例し、はり軸方向の変化はねじり率によって表わされるものとしている。この仮定は開断面ばりに対しては良い精度を保証するが、閉断面ばりの場合には必ずしも満足な結果を与えないものではないことが知られている。これに対し、断面の反りのはり軸方向の変化をねじり率とは異なる新しい関数で表わす点で特徴的な *Bonscoter* の論文²⁾で代表される理論が、閉断面に対してはより妥当性が高いものと評価され、最近では一般化しつつある²⁾。

ここでは、箱げたの曲げねじれ問題の解析に、その構成要素である個々の板帯に着し、箱げたをその集合体として捉える手法³⁾を適用した。その際 *Bonscoter* の仮定を採用するとともに、その仮定のもつ意味の吟味を行った。この解析方法の適用の結果として、箱げた断面の諸定数を構成板帯の諸定数の和で表わすことができ、実際計算に非常に便利な表式が得られた。さらに、数種の代表的な閉断面形をもつ箱げたについて、このような解析にもとづいて得られた結果を、断面の反りのはり軸方向の変化をねじり率によって表わす慣用理論による結果と比較対照し、箱げたの曲げねじれ特性を明らかにしようと試みたものである。

2. 基礎方程式

図-1に示すように、1, 2, ..., i, ..., nの板帯からなり、また a, b, ..., j, ..., mのセルをもつ任意形の箱げたを扱う。

まず、i番目の板帯(i-plate)の断面上の任意点 $P_i(x_i, y_i)$ の軸方向変位 $\tilde{w}_i$ は次式で表わされる：

$$\tilde{w}_i = w_i - (x_i \cos \alpha_i - y_i \sin \alpha_i) u_i' - (x_i \sin \alpha_i + y_i \cos \alpha_i) v_i' + \tilde{r}_i x_i \vartheta_i \dots (1)$$

ここに、 u_i, v_i, w_i は i-plate の図心 O_i の x, y, z 方向の変位。 u_i, v_i のダッシュは z に関する微分の意。 x_i, y_i, α_i については図-2参照。 $\tilde{r}_i$ は i-plate のせん断流を q_i とすると次式で表わされる：

$$q_i = G \vartheta \tilde{r}_i, \quad \tilde{r}_i = \tilde{r}_i x \quad \text{すなわち} \quad \tilde{r}_i \vartheta = \vartheta_{xz} \dots (2)$$

ここで導入された $\vartheta = \vartheta(z)$ はねじり率とは異なる新しい関数である。

つぎに、i-plate の図心 $O_i(x_i, y_i)$ の変位 (u_i, v_i, w_i) と断面全体の図心 O の変位 (u, v, w) との間につぎの関係を設定する：

$$u_i' = u' - y_i \vartheta, \quad v_i' = v' + x_i \vartheta, \quad w_i' = w - x_i u' - y_i v' - w_i \vartheta \dots (3)$$

ここに w_i は *Saint Venant* のねじりによって O_i 点に生ずる反りを表わす。

式 (3) を式 (1) に代入すると、

$$\tilde{w}_i = w - (x_i + x_i \cos \alpha_i - y_i \sin \alpha_i) u' - (y_i + x_i \sin \alpha_i + y_i \cos \alpha_i) v' - \{w_i + (x_i - \tilde{r}_i) x_i + r_{yi} y_i\} \vartheta \dots (4)$$

ここに、

$$r_{xi} = x_i \sin \alpha_i - y_i \cos \alpha_i, \quad r_{yi} = x_i \cos \alpha_i + y_i \sin \alpha_i \quad (\text{図-2参照})$$

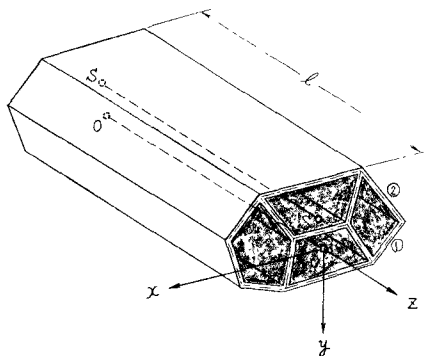


図-1 箱げたの一般図

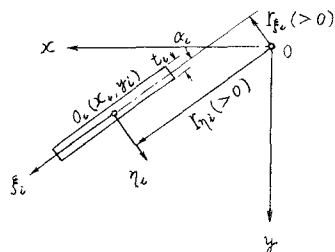


図-2 i-plate

断面上の任意点 P_i における軸方向の歪 $\tilde{\epsilon}_{zi}$ は式(4)より

$$\epsilon_{zi} = w' - (x_i + z_i \cos \alpha_i - r_i \sin \alpha_i) u'' - (y_i + z_i \sin \alpha_i + r_i \cos \alpha_i) v'' - \{ \omega_i + (J_{zi} - \tilde{r}_i) z_i + L_{zi} r_i \} \varphi' \dots (5)$$

一方、ねじりによる $x-z$ 面内のせん断歪 $\tilde{\gamma}_{zi}$ はねじりによる P_i 点の z_i 軸方向の変位 $\tilde{u}_{zi} = L_{zi} \varphi$ と式(4)のうちのねじりによる分 $\tilde{u}_{zi} = \{ \omega_i + (J_{zi} - \tilde{r}_i) z_i + L_{zi} r_i \} \varphi$ とを用いて

$$\tilde{\gamma}_{zi} = \frac{\partial \tilde{u}_{zi}}{\partial z} + \frac{\partial \tilde{w}_i}{\partial y} = L_{zi} \varphi' - (J_{zi} - \tilde{r}_i) \varphi \dots (6)$$

ここに、 φ は断面のねじれ回転角を表わす。

以上より箱げた全体に蓄えられる歪エネルギー π_1 は曲げに伴なうせん断歪分を無視して次式で与えられる：

$$\pi_1 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \int_{F_i} (E \tilde{\epsilon}_{zi}^2 + G \tilde{\gamma}_{zi}^2) dF_i dz = \frac{1}{2} \int_0^L [E J_y u''^2 + E J_x v''^2 + 2 E J_{xy} u'' v'' + E C_\omega \varphi'^2 + 2 E C_x v'' \varphi' + 2 E C_y u'' \varphi' - 2 G (J_k - J_T) \varphi \varphi' + G J_k \varphi'^2 + (G J_k - J_T) \varphi^2 + E F w'^2] dz \dots (7)$$

$$\left. \begin{aligned} F &= \sum_{i=1}^N F_i, \quad J_x = \sum_{i=1}^N (F_i y_i^2 + J_{yi} \sin^2 \alpha_i + J_{zi} \cos^2 \alpha_i), \quad J_y = \sum_{i=1}^N (F_i x_i^2 + J_{xi} \cos^2 \alpha_i + J_{zi} \sin^2 \alpha_i) \\ J_{xy} &= \sum_{i=1}^N \{ F_i x_i y_i + (J_{yi} - J_{xi}) \sin \alpha_i \cos \alpha_i \}, \quad C_x = \sum_{i=1}^N \{ F_i \omega_i y_i + (J_{zi} - \tilde{r}_i) J_{xi} \sin \alpha_i + L_{zi} J_{xi} \cos \alpha_i \} \\ C_y &= \sum_{i=1}^N \{ F_i \omega_i x_i + (J_{zi} - \tilde{r}_i) J_{yi} \cos \alpha_i - L_{zi} J_{yi} \sin \alpha_i \}, \quad C_\omega = \sum_{i=1}^N \{ F_i \omega_i^2 + (J_{zi} - \tilde{r}_i)^2 J_{xi} + L_{zi}^2 J_{yi} \} \\ J_T &= \sum_{i=1}^N F_i L_{zi}^2, \quad J_k = \sum_{i=1}^N F_i L_{zi} \tilde{r}_i \end{aligned} \right\} \dots (8)$$

断面の圆心 O の変位 (u, v) とせん断中心 $S(x_s, y_s)$ の変位 (u^*, v^*) との関係 $u'' = u''^* + y_s \varphi$ および $v'' = v''^* - x_s \varphi$ を用い、荷重として断面の圆心 O に作用する q_x, q_y 、せん断中心 S に作用する $q_x^*, q_y^*, m_z^*, m_\omega^*$ を考えると、系の全ポテンシャルエネルギー π^* はつぎのように表わされる。

$$\pi^* = \frac{1}{2} \int_0^L [E J_y u''^{*2} + E J_x v''^{*2} + 2 E J_{xy} u''^* v''^* + E C_\omega \varphi'^2 - 2 G (J_k - J_T) \varphi \varphi' + G J_k \varphi'^2 + G (J_k - J_T) \varphi^2 + E F w'^2 - 2 (q_x^* u^* + q_y^* v^* + q_x w + m_z^* \varphi + m_\omega^* \varphi)] dz \dots (9)$$

$$\text{ここに、} \quad C_\omega^* = C_\omega + J_x x_s^2 + J_y y_s^2 - 2 J_{xy} x_s y_s - 2 C_x x_s + 2 C_y y_s = C_\omega - C_x x_s + C_y y_s \dots (10)$$

式(9)、(10)においてせん断中心の座標を与える次式が考慮されている：

$$C_x^* = C_x - J_x x_s + J_{xy} y_s = 0, \quad C_y^* = C_y + J_y y_s - J_{xy} x_s = 0 \dots (11)$$

式(9)より変分問題のオイラーの微分方程式として得られる基礎方程式のうち、ねじりに関するもののみ記せば

$$G J_k \varphi'' - G (J_k - J_T) \varphi' + m_z^* = 0, \quad E C_\omega \varphi'' + G (J_k - J_T) (\varphi' - \varphi) - m_\omega^* = 0 \dots (12)$$

これは文献2)のものと全く一致する。両式より φ を消去すれば

$$\varphi'' - \frac{\alpha^2}{l^2} \varphi' = \frac{m_z^* + m_\omega^*}{K E C_\omega^*} - \frac{m_\omega^*}{G J_k} \dots (12)$$

$$\text{ここに、} \quad \alpha = l \sqrt{\frac{G J_T}{K E C_\omega^*}}, \quad K = \frac{J_k}{J_k - J_T}$$

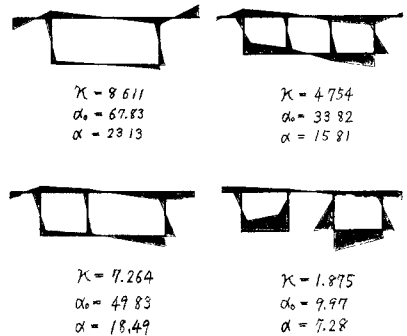
3. 数値計算結果の一例

代表的な4種の箱げた断面について、曲げねじれの度合を表わす

無次元パラメーター α とその補正係数 $\frac{1}{\sqrt{K}}$ との一例を図-3に示す。

$\frac{1}{\sqrt{K}}$ はセルの数の少ない程1に較べて小さな値をとり、それだけ α は減少し、したがって曲げねじれ現象は慣用理論による結果よりも

やや強まることになる。図-3で $\alpha_0 = \sqrt{\frac{G J_T}{E C_\omega^*}}$ 、すなわち $\alpha = \frac{\alpha_0}{\sqrt{K}}$ 。図-3 各種箱げたの ω -図と K, α_0, α の値



参考文献 1) S.U. Benocoter : A Theory of Torsion Bending for Multicell Beams. Journal of Applied Mech., March, 1954.

2) C.F. Kollbrunner & N. Hajdin : Dünnwandige Stäbe. Springer, 1972. 3) 深沢・内田 : 土木学会講演概要集 昭48 10