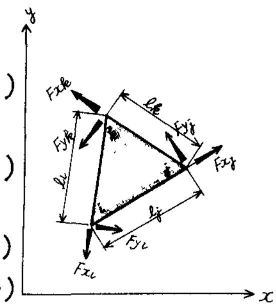
# I－1　平面応力場の有限変形解析

（株）宮地鉄工所　正員　後藤茂夫
〃　正員　大西聿記
〃　○正員　前田武夫

## [1] 要旨

本文は，非線型有限変形法によって，Scheibeの有限変形解析を試みたものであり，要素の回転変位，及び，プレストレスの影響を無視する事が出来ない構造系への適用を目的としたものである．

## [2] 要素辺方向余弦増分




〈図－1〉

図－1において，要素辺 $j$ について，投影長，辺長，方向余弦ベクトルは，

$$d_j=[x_j-x_i,\ y_j-y_i]^*,\quad l_j=\sqrt{d_j^* d_j}\ ,\quad \alpha_j=[\alpha_j,\beta_j]^*=\frac{1}{l_j}d_j \qquad \text{---}\quad (1)$$

であり，変形後について，

$$(l_j+\Delta l_j)^2=(d_j+\Delta d_j)^*(d_j+\Delta d_j) \qquad \text{---}\quad (2)$$

から，

$$\omega_j=\frac{2}{l_j^2}(d_j+\tfrac{1}{2}\Delta d_j)^*\Delta d \qquad \text{---}\quad (3)$$

$$\chi_j=1-\frac{1}{4}\omega_j+\frac{1}{8}\omega_j^2-\frac{5}{64}\omega_j^3+\frac{7}{128}\omega_j^4-\frac{21}{513}\omega_j^5+\cdots \qquad \text{---}\quad (4)$$

と，おけば，辺長増分，及び，方向余弦増分は，各々，

$$\Delta l_j=\frac{1}{2}\chi_j\,\omega_j\,l_j=\frac{\chi_j}{l_j}(d_j+\tfrac{1}{2}\Delta d_j)^*\Delta d_j \qquad \text{---}\quad (5)$$

$$\Delta\alpha_j=\frac{\Delta d_j-\alpha_j\Delta l_j}{l_j+\Delta l_j}=\frac{1}{l_j+\Delta l_j}\left[e-\frac{\chi_j}{l_j}\alpha_j(d_j+\tfrac{1}{2}\Delta d_j)^*\right]\Delta d_j \qquad \text{---}\quad (6)$$

と表わされる。

## [3] 絶対座標系における格点力増分

格点 $j$ に関し，要素座標系格点力ベクトル，格点力パラメータを，

$$F_j=[F_{xj},\ F_{yj}]^*,\ [\mu_{xj},\ \mu_{yj}]^*=\frac{1}{l_j+\Delta l_j}[F_{xj}+\Delta F_{xj},\ F_{yj}+\Delta F_{yj}] \qquad \text{---}\quad (7)$$

単位行列を，

$$e=\begin{bmatrix}1 & \\ & 1\end{bmatrix},\quad e'=\begin{bmatrix} & -1\\ 1 & \end{bmatrix} \qquad \text{---}\quad (8)$$

と，おけば，変換テンソル，格点力パラメータ行列は

$$t_j=[e,\ e']\alpha_j\ ,\quad \mu_j=\mu_{xj}e+\mu_{yj}e' \qquad \text{---}\quad (9)$$

と，表わされる．格点 $j$ における，絶対座標系格点力増分ベクトル $\Delta D_j$ は，

$$\Delta D_j=(t_j+\Delta t_j)(F_j+\Delta F_j)-t_jF_j=t_j\Delta F_j+\Delta t_j(F_j+\Delta F_j)=t_j\Delta F_j+\mu_j\left[e-\frac{\chi_j}{l_j}\alpha_j(d_j+\tfrac{1}{2}\Delta d)^*\right]\Delta d_j \qquad \text{---}\quad (10)$$

と，表わされ，第二項は，プレストレスの存在，及び，有限変形の影響を示す．

## [4] 要素座標系における断面力増分（その１）

要素座標系 $(\tilde{x},\tilde{y})$ を図－2の如く設定すると，格点 $m\ (m=i,j,k)$ の要素座標 $\tilde{x}_m=[\tilde{x}_m,\ \tilde{y}_m]^*$ は，

$$\tilde{x}_m=t_j^*(x_m-x_j)\triangleq t_j^*\tilde{d}_m\quad (m=i,j,k) \qquad \text{---}\quad (11)$$

となる，さらに，

$$\lambda_m=\frac{1}{l_j+\Delta l_j}[e,\ e'](\tilde{d}_m+\tfrac{1}{2}\Delta\tilde{d}_m),\quad s_m=\lambda_m\left[e-\frac{\chi_j}{l_j}\alpha_j(d_j+\tfrac{1}{2}\Delta d_j)^*\right],\ \hat{t}_j=t_j+\tfrac{1}{2}\Delta t_j \qquad \text{---}\quad (12)$$

とおけば，

$$\Delta\tilde{x}_m=(t_j+\tfrac{1}{2}\Delta t_j)^*\Delta\tilde{d}_m+\Delta t_j^*(\tilde{d}_m+\tfrac{1}{2}\Delta\tilde{d}_m)=\hat{t}_j^*\Delta\tilde{d}_m+s_m\Delta d_j \qquad \text{---}\quad (13)$$

と，表わせるが，注意す可きは，$\Delta\tilde{x}_m$ は，

$$\Delta\tilde{x}_m=t_j^*\Delta\tilde{d}_m+\Delta t_j^*(\tilde{d}_m+\Delta\tilde{d}_m) \qquad \text{---}\quad (14)$$

とも表わし得る。この場合，(12) に対応する変位パラメータは，

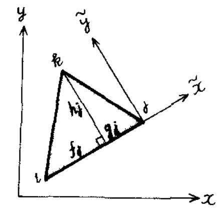
$$\lambda'_m = \frac{1}{l_j+\Delta l_j}[e, e'](\tilde{d}_m+\Delta\tilde{d}_m),\quad \delta'_m=\lambda'_m\left[e - \frac{x_j}{l_j}\alpha_j\left(d_j+\tfrac{1}{2}\Delta d_j\right)^*\right],\quad \Delta\tilde{x}_m = \mathbf{e}_j^*\Delta\tilde{d}_m + \delta'_m\Delta d_j \qquad \text{--- (15)}$$

となる。(13), (14)を詳記すれば，

$$\begin{bmatrix}\Delta\tilde{x}_i\\ \Delta\tilde{x}_j\\ \Delta\tilde{x}_k\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\hat{e}_j^*-\delta_i & \delta_i-\hat{e}_j^* & \\ -\delta_j & \delta_j & \\ -\delta_k & \delta_k-\hat{e}_j^* & \hat{e}_j^*\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta x_i\\ \Delta x_j\\ \Delta x_k\end{bmatrix} \text{ or } \begin{bmatrix}\Delta\tilde{x}_i\\ \Delta\tilde{x}_j\\ \Delta\tilde{x}_k\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{e}_j^*-\delta'_i & \delta'_i-\mathbf{e}_j^* & \\ -\delta'_j & \delta'_j & \\ -\delta'_k & \delta'_k-\mathbf{e}_j^* & \mathbf{e}_j^*\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta x_i\\ \Delta x_j\\ \Delta x_k\end{bmatrix} \qquad \text{--- (16)}$$

であり，これを，$\Delta\tilde{u} = T\cdot\Delta u$ と書き，今，$[a_m, b_m] \triangleq d_m^*$ とおけば，

$$[f_j, g_j, h_j] = \frac{1}{l_j}[(-a_ia_j-b_ib_j), (-a_ka_j-b_kb_j), (-a_jb_i+a_ib_j)] \qquad \text{--- (17)}$$




〈図-2〉

であり，さらに，

$$[\tilde a_i,\tilde a_j,\tilde a_k] = [-f_j, l_j, -g_j],\ [\tilde b_i,\tilde b_j,\tilde b_k]=[-h_j, 0, h_j],\ [\tilde\alpha_k,\tilde\beta_k]=\frac{1}{l_k}[g_j, h_j],\ [\tilde\alpha_i,\tilde\beta_i]=\frac{1}{l_i}[-f_j,-h_j],\ [\tilde\alpha_j,\tilde\beta_j]=[1,0] \qquad \text{--- (18)}$$

$$\hat{\mathbf{e}}_m=[e,e']\alpha_m,\quad \hat{\mathbf e}_j = \begin{bmatrix}\hat e_i & & \\ & \hat e_j & \\ & & \hat e_k\end{bmatrix},\quad \Delta = \begin{Vmatrix}1 & x_i & y_i\\ 1 & x_j & y_j\\ 1 & x_k & y_k\end{Vmatrix},\quad D_y = \frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix}1 & \nu & \\ \nu & 1 & \\ & & \frac{1-\nu}{2}\end{bmatrix},\quad B_j = \frac{1}{2\Delta}\begin{bmatrix}-\tilde b_k & \cdot & -\tilde b_i & \cdot & -\tilde b_j & \cdot\\ \cdot & \tilde a_k & \cdot & \tilde a_i & \cdot & \tilde a_j\\ \tilde a_k & -\tilde b_k & \tilde a_i & -\tilde b_i & \tilde a_j & -\tilde b_j\end{bmatrix} \qquad \text{--- (19)}$$

とおき，要素板厚をtとすれば，

$$\Delta F = [\Delta F_i, \Delta F_j, \Delta F_k]^* = t\Delta\hat{\mathbf e}_j^*B_j^*D_yB_j\Delta\tilde u = t\Delta\hat{\mathbf e}_j^* B_j^* D_y B_j T\cdot\Delta u \qquad \text{--- (20)}$$

となり，要素座標系格点力増分は，絶対座標系変位増分 $\Delta u=[\Delta x_i, \Delta x_j, \Delta x_k]^*$ の函数として表示される。

## [5] 要素座標系における断面力増分（その2）

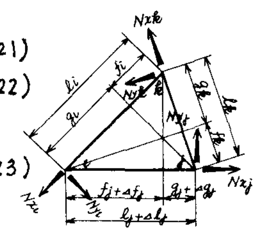
前節の解式は，suffix $(i,j,k)$ についてcyclicではない。そこで，図-3において，6箇の独立変数として $f_m, g_m\ (m=i,j,k)$ を採る。今，要素辺jに関し，

$$Q_j = -[a_ia_j+b_ib_j,\ a_ka_j+b_kb_j]^*,\quad \mathbf f_j=[f_j, g_j]^* = \frac{1}{l_j}Q_j \qquad \text{--- (21)}$$

$$r_i = -\left[\left(d_i+\tfrac12\Delta d_i\right),\ 0\right]^*,\quad r_j=-\left[\left(d_i+\tfrac12\Delta d_i\right), \left(d_j+\tfrac12\Delta d_j\right)\right]^*,\quad r_k = -\left[0,\ \left(d_j+\tfrac12\Delta d_j\right)\right]^* \qquad \text{--- (22)}$$

とおけば，

$$\Delta Q_j = [r_i, r_j, r_k][\Delta d_i, \Delta d_j, \Delta d_k]^* \qquad \text{--- (23)}$$




〈図-3〉

となる。さらに，変位パラメータ行列を

$$\nu_j = \frac{Q_j+\Delta Q_j}{l_j+\Delta l_j} \qquad \text{--- (24)}$$

とおけば，

$$\Delta\mathbf f_j = \frac{1}{l_j}(\Delta Q_j - \nu_j\Delta l_j) = \frac{1}{l_j}\left[r_i,\ r_j - \frac{x_j}{l_j}\nu_j\left(d_j+\tfrac12\Delta d_j\right)^*,\ r_k\right][\Delta d_i,\Delta d_j,\Delta d_k]^* \triangleq [\tilde r_i,\tilde r_j,\tilde r_k][\Delta d_i,\Delta d_j,\Delta d_k]^* \qquad \text{--- (25)}$$

故に，要素辺長 $l_j$ のみが，$l_j+\Delta l_j$ に変化した時の，要素座標系格点力増分は，

$$\Delta\hat d_j = [\Delta d_i, \Delta d_j, \Delta d_k]^*,\quad \begin{array}{c}[-\Delta f_j\ 0 \mid \Delta g_j\ 0 \mid 0\ 0]^*\\ (u_i\ v_i)\ (u_j\ v_j)\ (u_k\ v_k)\end{array} = \begin{bmatrix}-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}^*\begin{bmatrix}\Delta f_j\\ \Delta g_j\end{bmatrix} \triangleq I_j^*\Delta\mathbf f_j \qquad \text{--- (26)}$$

とおけば，

$$\Delta\hat N_j \triangleq [\Delta N_i, \Delta N_j, \Delta N_k]_j^* = t\hat{\mathbf e}_j^* B_j^* D_y B_j I_j \Delta\mathbf f_j = t\hat{\mathbf e}_j^*B_j^*D_yB_jI_j[\tilde r_i,\tilde r_j,\tilde r_k]\Delta\hat d_j \triangleq \hat K_j\cdot\Delta\hat d_j \qquad \text{--- (27)}$$

と，表示される。同様に，$l_i, l_k$ が $l_i+\Delta l_i$，$l_k+\Delta l_k$ に変化した時の格点力増分は

$$\Delta\hat N_i\triangleq[\Delta N_k,\Delta N_i,\Delta N_j]_i^* = \hat K_i[\Delta d_k,\Delta d_i,\Delta d_j]^*,\quad \Delta\hat N_k \triangleq [\Delta N_j, \Delta N_k,\Delta N_i]_k^* = \hat K_k[\Delta d_j,\Delta d_k,\Delta d_i]^* \qquad \text{--- (28)}$$

なる形式で表示される。ここで，suffixの配列を一致させるため

$$J_j = \begin{bmatrix}e & & \\ & e & \\ & & e\end{bmatrix},\quad J_k = \begin{bmatrix} & & e\\ e & & \\ & e & \end{bmatrix},\quad J_i = \begin{bmatrix} & e & \\ & & e\\ e & & \end{bmatrix} \qquad \text{--- (29)}$$

なる再配列行列を定義すれば，$\Delta l_i, \Delta l_j, \Delta l_k$ に因る，格点力増分合計は

$$\Delta F = [J_j\hat K_jJ_j^* + J_k\hat K_kJ_k^* + J_i\hat K_iJ_i^*][\Delta d_i,\Delta d_j,\Delta d_k]^* \qquad \text{--- (30)}$$

と表わされる。

## [6] 参考文献


後藤・大西・大槻・新村：「非線型有限変形法（大変形法）によるトラスの大変形解析とその応用プログラム」
（土木学会論文報告集 第194号 1971年10月）