

# 強風下の波面応答と気液乱流境界層流れに関する数値解析

Wavefront response under strong winds and Numerical analysis of gas-liquid turbulent boundary layer flow

北海道大学工学部 4年 ○学生員 曾根慎太郎(Shintaro Sone)

北海道大学大学院工学研究院 正会員 渡部靖憲(Yasunori Watanabe)

## 1. はじめに

大気流れの運動量輸送によって発生する海洋上の初期波は表面張力が支配する毛管波と重力波が重畳し、両波浪の相互作用を経て発達することが知られている(Longuet-Higgins 1992)<sup>1)</sup>。Longuet-Higgins (1992)によると、擾乱のない正弦波面に一樣な風応力を与えた場合にも、クレスト前面に毛管波列が発生し、同時にクレスト背後に交互交代渦列が生じる。これは風が誘発した微細水面応答が波面下の渦生成に寄与し、海中の境界層流れを支配していることを示唆するものである。

一方、大気側においても、一般に壁面乱流で知られるような馬蹄渦の形成を経て壁面上に交互交代渦が発生し、これは波状境界上においても生じることが報告されている(山下・渡部 2018)<sup>2)</sup>。即ち、強風下では波面をはさみ大気、海洋の両相に交互交代渦列を含む乱流境界層が発達することになる。これら両境界層流れは海面の応答を通して互いに影響を与えるはずであるが、移動境界と波面の極近傍の流れを実験的に計測するのは困難であり、さらに数値計算においても密度、粘性が不連続に変化する界面上でのみ生じる表面張力を厳密に与えるモデルはほとんどなく、現象の理解は進んでいない。

本研究は、渡部・土屋(2020)<sup>3)</sup>が開発した、気液混相乱流に対する Sharp interface model と Ghost fluid model を三次元 Large Eddy Simulation に導入し、一樣風場における波面応答並びに気液境界層流れの相互作用を明らかにしようとするものである。

## 2. 数値計算

本研究では渡部・土屋(2020)によって提案された、固定格子系の Large Eddy Simulation の枠組みにおいて界面での法線方向ジャンプ条件、接線応力条件を満たすよう気液両相を別々に計算する Sharp interface model をもとに、初期条件で水面に波を与え、両相の相互作用を解析する。

### (1) 支配方程式

フィルター操作された Navier-Stokes 方程式を支配方程式とする。

$$\frac{D\mathbf{u}^l}{Dt} = -\nabla \frac{p^l}{\rho^l} + \nu^l \nabla^2 \mathbf{u}^l - \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}^l - \mathbf{g} \quad (1)$$

$$\frac{D\mathbf{u}^g}{Dt} = -\nabla \frac{p^g}{\rho^g} + \nu^g \nabla^2 \mathbf{u}^g - \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}^g \quad (2)$$

$\boldsymbol{\tau}^l, \boldsymbol{\tau}^g$  は各々気体、液体のサブグリッド(SG)応力である。fractional step 法により、(1)式は次の3つの離散方程式に分解される。

$$\frac{D\mathbf{u}^{l(*)}}{Dt} = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\mathbf{u}^{l(**)} - \mathbf{u}^{l(*)}}{\Delta t} = -\nabla P^{l(*)} - \mathbf{g} \quad (4)$$

$$\frac{\mathbf{u}^{l(n+1)} - \mathbf{u}^{l(*)}}{\Delta t} = \nu^l \nabla^2 \mathbf{u}^{l(**)} - \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}^{l(**)} \quad (5)$$

ここで  $P^l = \frac{p^l}{\rho^l}$  で上付き(n)と(\*)(\*\*)はタイムステップ間の中間を意味する。式(4)の発散をとると圧力Pに対するポアソン方程式となる。

$$\nabla^2 P^{l(*)} = \frac{\nabla \cdot \mathbf{u}^{l(*)}}{\Delta t} \quad (6)$$

移流方程式(3)は CIP 法、(4)および(6)は予測子修正子法を適用し、(6)は Multi-grid 法にて逐次更新され、数値的に計算される。

気体の運動方程式である(2)式についても同様な方法で数値的に解くことができる。

水面計算は水面からの距離を表すレベルセット関数  $\phi(\mathbf{x}, t)$  を用いて以下の式を用いて行う。

$$\frac{D\phi}{Dt} = \frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}} = 0 \quad (7)$$

水面計算も移流方程式(7)に対してCIP法によって更新される。

Sharp interface model の枠組みの中で、各相の最近傍グリッドに離散式(3),(5),(7)を解く際、気液で大きく速度の異なる場合、別相の速度を用いて計算すると正しく速度を求められない。したがって気液界面の力学的境界条件を満足するように別相に Ghost 流速として外挿し、力学的矛盾が生じないように、離散式を解いていく。

### (2) 境界条件

気液の境界面では、両相の接線方向せん断力が等しくなるため、以下の式が境界条件となる。

$$\mu^l \left( \frac{\partial u_n^l}{\partial l} \Big|_s + \frac{\partial u_l^l}{\partial n} \Big|_s \right) = \mu^g \left( \frac{\partial u_n^g}{\partial l} \Big|_s + \frac{\partial u_l^g}{\partial n} \Big|_s \right) \quad (8)$$

$$\mu^l \left( \frac{\partial u_n^l}{\partial m} \Big|_s + \frac{\partial u_m^l}{\partial n} \Big|_s \right) = \mu^g \left( \frac{\partial u_n^g}{\partial m} \Big|_s + \frac{\partial u_m^g}{\partial n} \Big|_s \right) \quad (9)$$

ここで  $\mathbf{n}$  は境界面に対する法線方向、 $\mathbf{l}, \mathbf{m}$  は接線方向を示す。

境界面での  $\mathbf{n}$  方向流速の  $\mathbf{l}$  方向勾配は以下のように変形

できる。

$$\frac{\partial u_n}{\partial l} \Big|_s = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial l} \cdot \mathbf{n} \Big|_s = \sum_{i,j=1,2,3} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \Big|_s l_j n_i \quad (10)$$

同様に

$$\frac{\partial n_l}{\partial n} \Big|_s = \sum_{i,j=1,2,3} \frac{\partial n_l}{\partial x_j} \Big|_s l_j n_i \quad (11)$$

ここで  $n_j, l_j, m_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ) は法線、接線方向ベクトルの ( $x, y, z$ ) 成分である。

任意のグリッド上での流速勾配は、次式のように境界面上の流速勾配と未定乗数  $a_{ij}^l, b_{ij}^l, c_{ij}^l$  に対する一次結合で表せると仮定する。

$$\frac{\partial u_i^l}{\partial x_j} = \frac{\partial u_i^l}{\partial x_j} \Big|_s + a_{ij}^l x^l + b_{ij}^l y^l + c_{ij}^l z^l \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (12)$$

式(10)(11)を用いて式(8)(9)を変形し、式(12)を代入して行列の形で表現すると以下ようになる。

$$T_l A = B_l \quad (13)$$

$$T_m A = B_m \quad (14)$$

ここで

$$T_l = [2\mu^l x_1^l l_1 n_1 \dots (l_i n_j + l_j n_i) \mu^l x_i^l \dots 2\mu^l x_3^l l_3 n_3 \\ 2\mu^g x_1^g l_1 n_1 \dots (l_i n_j + l_j n_i) \mu^g x_i^g \dots 2\mu^g x_3^g l_3 n_3] \\ T_m = [2\mu^l x_1^l m_1 n_1 \dots (m_i n_j + m_j n_i) \mu^l x_i^l \dots 2\mu^l x_3^l m_3 n_3 \\ 2\mu^g x_1^g m_1 n_1 \dots (m_i n_j + m_j n_i) \mu^g x_i^g \dots 2\mu^g x_3^g m_3 n_3]$$

$$A = [a_{11}^l, b_{11}^l, c_{11}^l \dots a_{ij}^l, b_{ij}^l, c_{ij}^l \dots a_{33}^l, b_{33}^l, c_{33}^l \\ a_{11}^g, b_{11}^g, c_{11}^g \dots a_{ij}^g, b_{ij}^g, c_{ij}^g \dots a_{33}^g, b_{33}^g, c_{33}^g]^T$$

$$B_l = \sum \left( \mu^l \frac{\partial u_i^l}{\partial x_j} - \mu^g \frac{\partial u_i^g}{\partial x_j} \right) (l_i n_j + l_j n_i)$$

$$B_m = \sum \left( \mu^l \frac{\partial u_i^l}{\partial x_j} - \mu^g \frac{\partial u_i^g}{\partial x_j} \right) (m_i n_j + m_j n_i)$$

上記の式を最小二乗法により  $a_{ij}^l, b_{ij}^l, c_{ij}^l$  を求め、境界上の流速勾配を求める。その値を次式(テイラー近似)に代入し、液体の Ghost 流速が気体グリッドに外挿できる。

$$u_i^l = u_i^l \Big|_s + \frac{\partial u_i^l}{\partial x_i} \Big|_s x_j^l \quad (15)$$

同様に気体の速度も液体のグリッドに挿入できる。

圧力に対するポアソン方程式に対する水面での境界条件として、法線方向の力学的境界条件(ジャンプ条件)をレベルセット関数  $\phi$  によって捉えた水面の位置で与える。

$$p^l - \gamma p^a = 2\nu^l \frac{\partial u_n^l}{\partial n} - 2\nu^a \frac{\partial u_n^a}{\partial n} + \frac{\sigma}{\rho^l} \kappa \quad (16)$$

ここで  $\gamma = \frac{\rho^a}{\rho^l}$ 、 $\sigma$  は表面張力係数、 $\kappa$  は曲率であり、 $\phi$  から求められる。

### (3) 計算条件

計算領域は無次元長さ  $2.0 \times 1.0 \times 0.25$  の直方体とした。

すべての面に周期境界条件が適用され、底面では non-slip 条件が与えられた。水深は実次元で 20cm である。(図-1)

初期条件として無次元水深 0.55 に対し、振幅 0.02 の余弦波を与えた。

$z$  が水位よりも高い気相グリッドでは、 $x$  軸方向に一定の静圧力勾配  $\frac{\partial p}{\partial x} = \alpha$  ( $\alpha = -4$ ) で駆動されるような風場が与えられる。

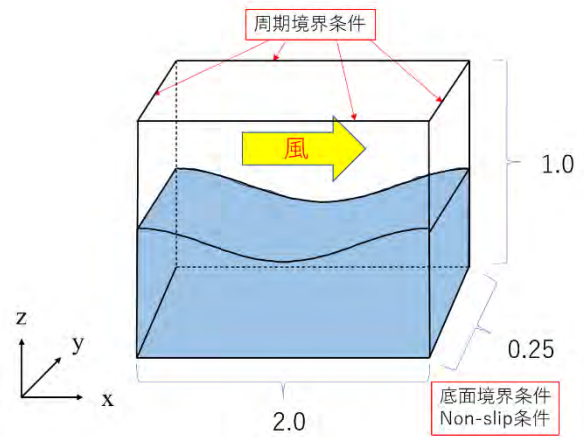


図-1 計算領域

## 3. 計算結果

### (1) 初期条件

初期条件として水面に与えた余弦波に対し、レベルセット関数  $\phi$  を挿入した。初期流速は気体、液体ともに  $u, v, w$  (流速の  $x, y, z$  方向成分) はすべて 0 である。

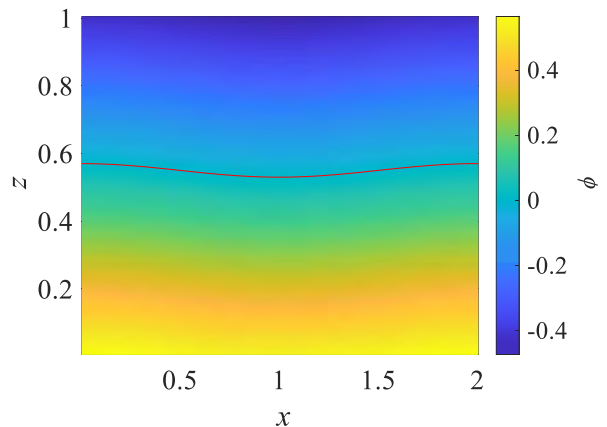
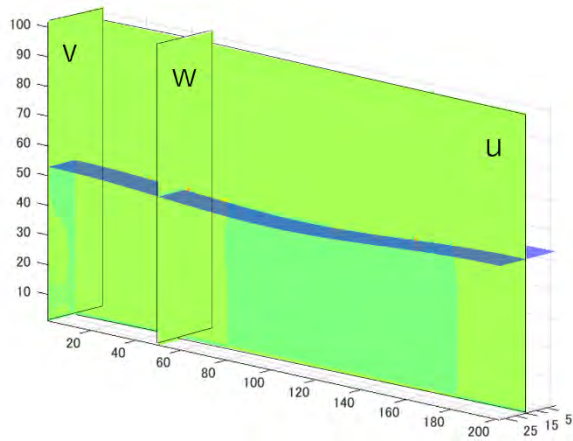
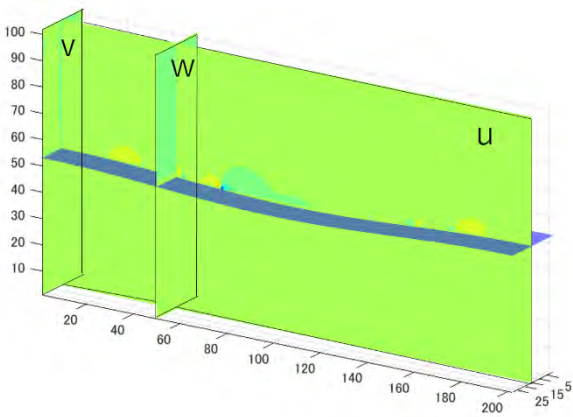


図-2 レベルセット関数  $\phi$

### (2) 時間経過後

無次元時間  $t = 0.0049$  における液相、気相各々の流速計算結果を図-3,4 に示す。

図-3 液相流速( $t=0.0049$ )図-4 気相流速( $t=0.0049$ )

$t=0.0049$ はまだ計算初期であるため、これらの流速の計算結果から考察できることや、確認できる現象はまだあまりないが、今後さらに時間が経過すると風の大きさが増大し、徐々に流体側にも流れなどが確認されることが予測される。よって今後は時間経過することで見られる様々な変化・現象などにも着目していきたい。

また今回の結果は、気体の密度を液体の1/10の大きさに計算している。理由は気体の密度を現実に近い液体の約1/1000とした場合、圧力計算に問題が発生してしまうからである。この課題に関しては、今後修正していく必要がある。

#### 参考文献

- 1) Longuet-Higgins : Capillary rollers and bores. J. Fluid Mech. vol.240,pp.659-679,1992
- 2) 山下 賢人・渡部 靖憲 : 強風下の風波波面上の流れと海面抵抗. 土木学会論文集 B2(海岸工学),Vol.74,No.2,I\_73-I\_78,2018
- 3) 渡部 靖憲・土屋 裕嵩 : 気液境界層流れの相互作用を経た風波の発達機構. 土木学会論文集 B2(海岸工学),Vol.76,No.2,I\_157-I\_162,2020
- 4) Gotoh.H,Okayasu.A,Watanabe.Y : Computational wave dynamics