

# 拡散方程式の逆解析に関する基礎的研究

Fundamental study on Inverse analysis of Diffusion equations

北海道大学大学院工学院環境フィールド工学専攻 ○学生員 中澤博登 (Hirotō Nakazawa)  
北海道大学大学院工学研究院 正員 田中 岳 (Gaku Tanaka)

## 1. はじめに

地中における物質流れは、透水係数などの場の物性値を詳細に得ることが一般に困難であるため、それらを仮定しての順解析と同時に、フィルタ理論や遺伝的アルゴリズムなどの逆解析もされてきた。阪田、岩永<sup>1)</sup>は、複数の逆解析法を地下水流れ(断面二次元・被圧定常流れ)に用いて、それらの有用性を議論している。昨今、この逆解析法として着目されているのが、大量の情報から本質的なもののみを抽出するスパースモデリングによる方法である。土木工学の分野では、例えば土留めの変位から土圧分布を推定<sup>2)</sup>、あるいは橋梁構造の信頼性計算モデル構築<sup>3)</sup>などの問題に適用が試みられている。また、林、永原<sup>4)</sup>は、物質濃度の拡散問題を例に、物質濃度の空間的変化量を情報(観測値)として、境界での物質濃度が0の下で、ある時刻の濃度分布を逆推定している。

本研究では、非定常被圧地下水モデルを例に、林、永原<sup>4)</sup>の技法を拡張し、地下水(水頭)のみを情報に用いて、境界条件が時間変化する下での水頭の分布を逆推定する方法を提案し、仮想的な数値実験から検討する。

## 2. 解析方法

本研究では、以下の平面2次元拡散方程式(デカルト座標系)を対象とする。

$$\frac{\partial h}{\partial t} = d \left( \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \right) \quad (1)$$

例えば、被圧地下水流れとすると、 $h$ : 地下水(ある基準面からの水頭) [L];  $d$ : 水頭拡散率 [L<sup>2</sup>T<sup>-1</sup>]. なお、以下の議論を容易にする為、次式を用いて無次元化すると、

$$h = h_* H, \quad d = d_* D, \quad t = t_* T, \quad x = x_* X, \quad y = y_* Y$$

$$\frac{\partial H(X, Y, T)}{\partial T} = D \left( \frac{\partial^2 H(X, Y, T)}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 H(X, Y, T)}{\partial Y^2} \right) \quad (2)$$

を得る。ただし、アスタリスク(\*)の付した変数は、無次元化基準量を示し、大文字の変数は、無次元量となる。

なお、 $t_* = x_*^2/d_*$ 、 $x_* = y_*$ としている。

式(2)を数値的に解く順解析には幾つかの方法があるが、解析対象の場を格子点で構成された長方形の領域にFTCSスキームを用いると、ある時刻 $T_r$ の拡張された水頭(境界を含まない領域内部の格子点の水頭を表す列ベクトルに、大きさ1の要素を加えた列ベクトル) $H_r$ と、 $\Delta T$ 時刻後の時刻 $T_{r+1}$ の $H_{r+1}$ は、次式のような関係にある。

$$H_{r+1} = \Omega_r H_r \quad (3)$$

なお、行列 $\Omega_r$ は境界の水頭を考慮した拡散の過程を意味し、境界の水頭が0の場合の拡散の過程 $\Omega_{0,r}$ (林、永原<sup>4)</sup>の行列 $\Omega$ に相当)を用いると、以下のように表される。なお、 $H_{0,r}$ はFTCSスキームにおいて境界の水頭を取り入

れるための列ベクトルである。

$$\Omega_r = \begin{pmatrix} \Omega_{0,r} & H_{0,r} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \quad (4)$$

式(3)、(4)を用いると、時刻 $T_r$ の水頭 $H_r$ を基準として、 $n\Delta T$ 時刻後の水頭 $H_{r+n}$ は、

$$H_{r+n} = Z H_r \quad (5)$$

$Z = \Omega_{r+n} \Omega_{r+n-1} \cdots \Omega_{r+1} \Omega_r$ ;  $n$ : 正の整数)のように求まる。ここで、有限な情報(観測値)を基に、ある時刻 $T_r$ の水頭 $H_r$ の分布を逆推定する技法<sup>4)</sup>を要約すると、観測値などの既知の情報 $b$ (列ベクトル)と、ある時刻 $T_r$ の水頭 $H_r$ といった未知量(列ベクトル)とが、行列 $A$ を介して関係付けられる劣決定問題を、以下の $l^1$ ノルム正則化(LASSO)の最小化問題に帰着させ、

$$\text{minimize} \left( \frac{1}{2} \|A H_r - b\|_2^2 + \lambda \|H_r\|_1 \right) \quad (6)$$

これをADMM(Alternating Direction Method of Multipliers)を用いて効率的に解くものである。ADMMアルゴリズムについては、吉田、田崎ら<sup>2)</sup>、あるいは永原<sup>3)</sup>が参考になる。なお、先に述べたように林、永原<sup>4)</sup>は、情報 $b$ を観測点における空間的変化量として、式(5)に基づき行列 $A$ の定式化を行っている。然しながら、実際の観測点で空間方向での変化量を定義し、計測することは容易ではない。そこで本研究では、観測された水頭の値を直接用いて情報 $b$ を構成し、逆解析する方法について検討する。

## 3. 数値実験

解析場は、林、永原<sup>4)</sup>と同じく、 $X, Y$ 方向それぞれを25分割した $0 \leq X \leq 5, 0 \leq Y \leq 5$ の格子平面( $\Delta X = 0.2, \Delta Y = 0.2$ )とする。また、計算の時間間隔 $\Delta T = 0.04$ 、水頭拡散率 $D = 2.8 \times 10^{-2}$ として、ある時刻 $T_r$ の水頭には、

$$H_r = 0.6 \exp[-3.0\{(X-3.4)^2 + (Y-1.6)^2\}] + 0.8 \exp[-2.0\{(X-1.4)^2 + (Y-2.8)^2\}] \quad (7)$$

を与える。観測点は格子平面上にランダムに配置し、その数を50, 40, 30, 20, 10, 5, 1と変化させる。林、永原<sup>4)</sup>は、この観測点から得る情報として、 $X, Y$ 方向それぞれの変化量を定義するために、隣接する格子点からの情報も用いている(実際には、観測点の三倍の格子点から情報を取得。以降、「空間方向の変化量データ」と呼ぶ)。これに対して、本研究では、観測された水頭のみを用いた場合(以降、「観測点データ」と呼ぶ)の逆解析を行い、精度の差異について、観測点数の変化、ADMMの更新回数と合わせて評価する。

## 4. 結果

観測点数が50の場合において、ADMM更新回数ごと

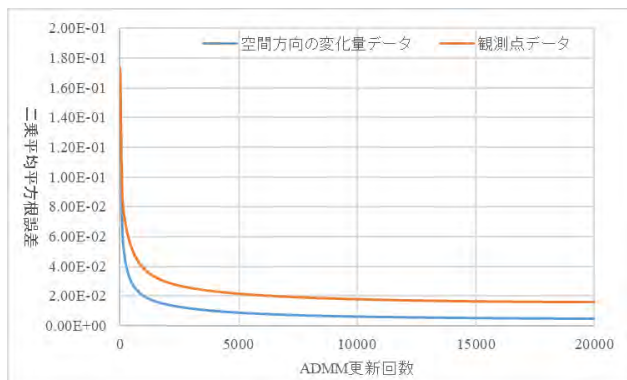


図-1 ADMM 更新回数ごとの推定結果に対する二乗平均平方根誤差

に、空間方向の変化量データを用いた逆解析の結果と、観測点データを用いたもの、それぞれの二乗平均平方根誤差(式(7)との差)を取ったものを図-1に示す。また結果の一部として、観測点データを用いて、ADMMを20000回まで更新して逆解析した水頭分布と、その比較対象のある時刻の水頭の分布(式(7))を図-2に示す。

また、ADMM更新回数が20000回の場合において観測点数ごとに、空間方向の変化量データを用いたものと、観測点データを用いたもの、それぞれの二乗平均平方根誤差(同式との差)を取ったものを図-3に示す。

## 5. 考察

図-1、図-3より、観測点から得られる情報が空間方向の変化量データである場合、観測点データである場合、その何れも、観測点の数が増加するにつれ、またADMMの更新回数が増加するにつれて、二乗平均平方根誤差の値は0に近づく傾向が見られる。先に述べたように、空間方向の変化量データを用いる手法では、実際に設置する観測点の数の三倍の格子点からの情報が用いられている。これは、林、永原<sup>4)</sup>の空間方向の変化量の定義式からわかる。ここでの数値実験の例に限定ではあるが、本研究で提案する観測点データを用いた後者の方法は、同一の観測点の数において用いる情報の量が前者の方法の三分之一になるものの、十分な精度での推定を実現するようである。このことを踏まえると、この提案方法を、現実の地下水解析に実装することも可能になるものと考えられる。

## 6. 終わりに

ここでは、解析場の境界の水頭を0として、限定された観測点の水頭の値のみから、ある時刻の境界内部の水頭の分布を十分な精度で逆推定することが可能となった。現在、より現実的な地下水流れ場として、境界の水頭が時間変化する条件下での検討を行っている。その成果は、本報告会にて公表する予定である。

**謝辞:** 本研究の一部は、JSPS 科研費 (JP18K04360) の助成を受けて実施された。

## 参考文献

- 1) 阪田義隆, 岩永昇二: 地下水シミュレーションの逆

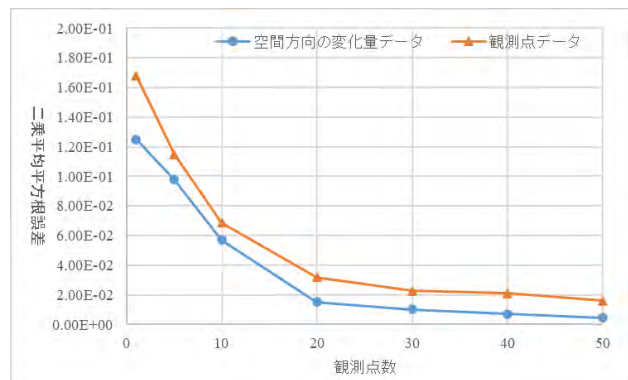


図-3 観測点数ごとの推定結果に対する二乗平均平方根誤差

解析法における全接点水位再現性を指標とした比較数値実験, 土木学会論文集 B1(水工学), Vol. 75, No. 2, I\_1231-I\_1236, 2019.

- 2) 吉田郁政, 田崎陽介, 児玉真乃介, 大竹雄: スパースモデリングの基本的考え方と土木工学への適用に関する基礎研究, 土木学会論文集 A2(応用力学), Vol. 73, No. 2 (応用力学論文集 Vol. 20), I\_55-I\_63, 2017.
- 3) 西尾真由子, 三浦正樹, 珠玖隆行: スパースモデリングによる既存橋梁の構造信頼性計算のための代替モデル構築, 土木学会論文集 A2(応用力学), Vol. 74, No.2 (応用力学論文集 Vol. 21), I\_125-I\_136, 2018.
- 4) 林直樹, 永原正章: 超スマート社会を支える分散スパースモデリング—マルチエージェントネットワーク上のビックデータ解析—, 電子情報通信学会基礎・境界ソサイエティ, Vol. 13, No. 2, pp. 95-107, 2019.
- 5) 永原正章: スパースモデリング 基礎から動的システムへの応用, pp. 1-208, コロナ出版, 2017.

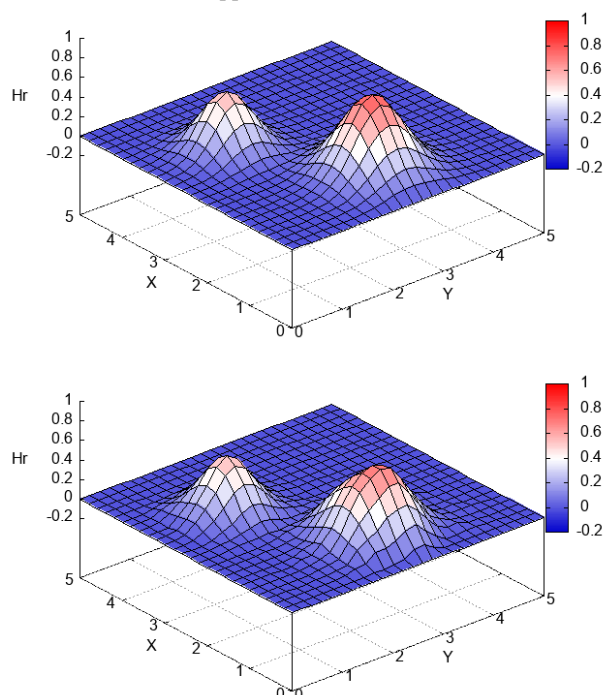


図-2 ある時刻 $T_r$ の水頭分布 $H_r$ の推定結果(上図:式(7);下図:20000回の結果)