

MFSによる面外波動解析における半無限領域の取り扱い

Treatment of semi-infinite domain in anti-plane wave analysis by MFS

北海道大学工学部

○ 学生員 坂田宙斗 (Hiroto Sakata)

北海道大学大学院工学研究院

正会員 古川陽 (Akira Furukawa)

1. はじめに

超音波非破壊評価は構造物の安全性を評価する上で重要な役割を担っており、その手法の開発において、数値シミュレーションは大きな貢献が期待されている。代表的な数値シミュレーション手法として、有限差分法、有限要素法、境界要素法がある。これらの解析手法は解析領域やその境界をメッシュ（格子、要素など）によって分割し解析を行うため、メッシュ分割型の解法に分類される。

これに対して、MFS（基本解近似解法）は、メッシュフリー型の数値シミュレーション手法として知られている¹⁾。MFSは、対象とする問題の基本解を用いて近似解を表現し解析を行う。MFSはメッシュ分割型の解法と比較して、計算精度が高く、数値計算の実装も容易であるという特徴がある。

部材表面近傍の欠陥や腐食減肉、部材界面の剥離を対象とする超音波非破壊評価では、自由表面や部材界面からの反射波の影響を無視することはできない。このとき、数値シミュレーションにおける解析領域は、半無限領域として取り扱われる。多くの数値シミュレーション手法において、これらの半無限領域は特別な取り扱いが要求される。MFSについてもその例外ではなく、半無限領域の取り扱いについて整理しておくことは、これらの解析を行う上で必要不可欠である。

このような背景を踏まえ、本研究では、半無限領域を対象とした面外波動問題に対してMFSを適用する。そして、MFSによる半無限領域の取り扱いについて、半無限領域の平面波の入射・反射問題をもとに考察する。以下では特に断りのない限り、ギリシャ文字の下付き添え字は1, 2をとり、1つの項に繰り返し現れる下付き添え字に対して総和規約を適用する。

2. 解析手法

本研究では、等方で均質な線形弾性体の面外波動問題について考える。図-1に、本研究で取り扱う半無限領域 V を示す。同図において、 S は半無限領域の境界、 V_c は補領域を表す。周波数領域における等方性弾性体の運動方程式は、

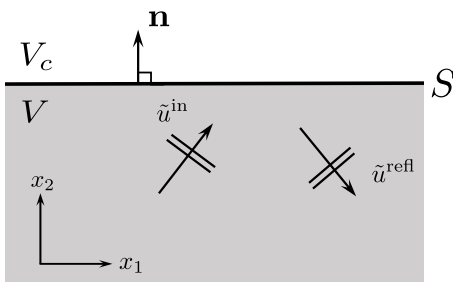


図-1 対象とする問題

物体力をゼロと仮定すると、次式で与えられる。

$$\left(\mu \frac{\partial^2}{\partial x_\beta \partial x_\beta} + \rho \omega^2\right) \tilde{u}(\mathbf{x}) = 0 \quad (1)$$

ここに、 $\tilde{u}(\mathbf{x})$ は位置 \mathbf{x} における面外方向変位、 ω は角周波数を表す。また、 ρ, μ は弾性体の密度とせん断弾性係数である。加えて、式(1)に示す方程式の線形性から、 $\tilde{u}(\mathbf{x})$ について以下の関係式が成り立つ。

$$\tilde{u}(\mathbf{x}) = \tilde{u}^{\text{in}}(\mathbf{x}) + \tilde{u}^{\text{refl}}(\mathbf{x}) \quad (2)$$

ここに、 $\tilde{u}^{\text{in}}(\mathbf{x})$ は入射波の変位、 $\tilde{u}^{\text{refl}}(\mathbf{x})$ は境界 S による反射波の変位を表す。ただし、入射波は既知とする。本研究では、境界条件を次式で与える。

$$\tilde{t}(\mathbf{x}) = \mu \frac{\partial \tilde{u}}{\partial n_x}(\mathbf{x}) = 0; \mathbf{x} \in S \quad (3)$$

ただし、 $\tilde{t}(\mathbf{x})$ は位置 \mathbf{x} における表面力の面外方向成分、 $\partial/\partial n_x$ は境界 S 上での法線方向微分を表す。

次に、MFSの定式化を示す。MFSでは、領域 V および境界 S の変位を次式で表現する。

$$\tilde{u}(\mathbf{x}) := \tilde{u}^{\text{in}}(\mathbf{x}) + \sum_{k=1}^N \tilde{U}(\mathbf{x}, \mathbf{y}_k) \tilde{c}_k; \mathbf{x} \in V \cup S \quad (4)$$

ここに、 \tilde{c}_k は境界条件によって決定される係数を表す。また、 $\tilde{U}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ は、式(1)に示す運動方程式の基本解であり、次式で与えられる。

$$\tilde{U}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{i}{4\mu} H_0^{(1)}(k_T r) \quad (5)$$

ここに、 \mathbf{x} は観測点、 \mathbf{y} は源点を表す。 k_T は面外波動の波数、 $H_n^{(1)}$ は n 次の第1種Hankel関数を表す。また、 $r = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ および $i = \sqrt{-1}$ である。一方、境界 S における表面力は、式(4)に示す表示式を用いて以下のように表現できる。

$$\tilde{t}(\mathbf{x}) := \tilde{t}^{\text{in}}(\mathbf{x}) + \sum_{k=1}^N \tilde{T}(\mathbf{x}, \mathbf{y}_k) \tilde{c}_k; \mathbf{x} \in S \quad (6)$$

ここに、 $\tilde{T}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ は表面力に関する基本解であり、次式で与えられる。

$$\tilde{T}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mu \frac{\partial \tilde{U}}{\partial n_x}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\frac{i}{4\mu} H_1^{(1)}(k_T r) \frac{\partial r}{\partial x_\beta} n_\beta \quad (7)$$

ここに、 n_β は境界 S 上の外向き単位法線ベクトルを表す。

本研究では、散乱体の境界 S 上に選点 \mathbf{x}_i ($i = 1, 2, \dots, M$)を配置し、その選点において境界条件を満たすように係数 \tilde{c}_k を決定する。このとき、解くべき連立1次方程式は以下の通りとなる。

$$\tilde{\mathbf{D}} \tilde{\mathbf{c}} = \tilde{\mathbf{h}} \quad (8)$$

ここに、

$$(\tilde{\mathbf{D}})_{ik} := \tilde{T}(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_k), (\tilde{\mathbf{c}})_k := \tilde{c}_k, (\tilde{\mathbf{h}})_i := -\tilde{t}^{\text{in}}(\mathbf{x}_i) \quad (9)$$

である。式(8)を解くことで、係数 \tilde{c}_k を求めることができる。また、半無限領域 V 内の面外方向変位は、この係数 \tilde{c}_k を式(4)に代入することで得られる。

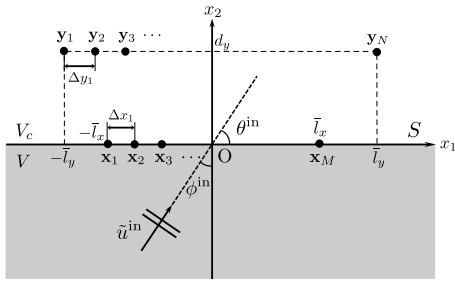


図-2 解析モデル

表-1 解析に用いるパラメータ

ω	ρ	μ	u_0	ϕ^{in}	M	N	\bar{l}_x	\bar{l}_y	d_y
1	1	1	1	$\pi/3$	400	400	10	40	1,10

3. 数値解析例

3.1 解析条件

図-2に解析モデルを示す。同図において、入射波は平面波とし、その面外方向変位 $\tilde{u}^{\text{in}}(\mathbf{x})$ は以下の式で与えた。

$$\tilde{u}^{\text{in}}(\mathbf{x}) = u_0 e^{i\mathbf{k}^{\text{in}} \cdot \mathbf{x}} \quad (10)$$

ここに、 e は Napier 数、 u_0 は入射波の振幅を表す。また、 \mathbf{k}^{in} は入射波の波数ベクトルであり、次式で与えられる。

$$\mathbf{k}^{\text{in}} = k \mathbf{p}^{\text{in}} \quad (11)$$

ここに、 k は入射波の波数であり、以下の式で計算される。

$$k = \frac{\omega}{c}, \quad c = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad (12)$$

ただし、 c は入射波の位相速度である。また、 \mathbf{p}^{in} は以下の式で与えられる。

$$\mathbf{p}^{\text{in}} = \begin{Bmatrix} \cos \theta^{\text{in}} \\ \sin \theta^{\text{in}} \end{Bmatrix}, \quad \theta^{\text{in}} = \frac{\pi}{2} - \phi^{\text{in}} \quad (13)$$

ここに、 ϕ^{in} は平面波の入射角を表す。

MFS の適用において、選点 \mathbf{x}_i および源点 \mathbf{y}_k は以下の式によって配置した。

$$\mathbf{x}_i = \begin{Bmatrix} -\bar{l}_x + (i-1)\Delta x_1 \\ 0 \end{Bmatrix}; \quad i = 1, 2, \dots, M \quad (14)$$

$$\mathbf{y}_k = \begin{Bmatrix} -\bar{l}_y + (k-1)\Delta y_1 \\ d_y \end{Bmatrix}; \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (15)$$

ただし、 $\bar{l}_x, \bar{l}_y, d_y$ は図-2に示す通りである。また、 Δx_1 および Δy_1 は、以下の式で与えた。

$$\Delta x_1 = \frac{2\bar{l}_x}{M-1} \quad (16)$$

$$\Delta y_1 = \frac{2\bar{l}_y}{N-1} \quad (17)$$

なお、これらの解析条件に含まれるパラメータは表-1で与え、式(8)に示す連立1次方程式の解法には最小二乗法を用いた。

3.2 解析結果

前節に示した解析条件に対して、解析解²⁾とMFSによって得られた近似解の比較を行う。本節では、境界近傍の領域における面外方向変位の実部の値を比較する。図-3に解析解を、図-4に $d_y = 1$ とした場合のMFSによる近似解を示す。これらの結果を比較すると、 x_1 および x_2 の値が小

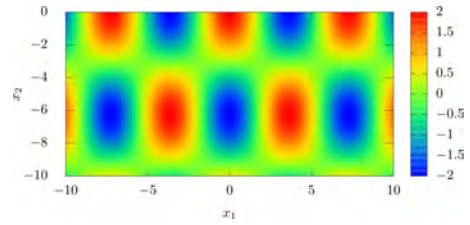


図-3 面外方向変位 $\text{Re}[\tilde{u}(\mathbf{x})/u_0]$ (解析解)

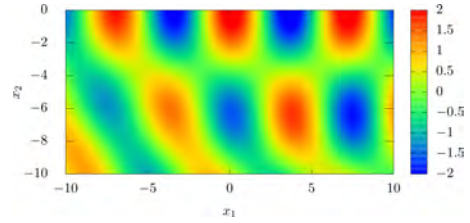


図-4 面外方向変位 $\text{Re}[\tilde{u}(\mathbf{x})/u_0]$ (MFS, $d_y = 1$)

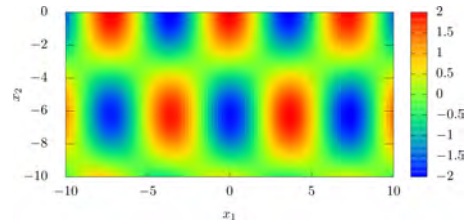


図-5 面外方向変位 $\text{Re}[\tilde{u}(\mathbf{x})/u_0]$ (MFS, $d_y = 10$)

さくなる領域で、変位分布に差が生じていることが確認できる。また、図-5には、 $d_y = 10$ とした場合のMFSによる近似解を示す。図-5に示す結果は、図-3に示す結果と概ね一致していることが確認された。これは、 d_y の値が大きくなることで、源点と境界の距離が大きくなり、基本解によって表現される領域V内の波動の波面が平面に近づくためであると考えられる。

4. おわりに

本研究では、MFSを半無限領域を対象とする面外波動問題に適用した。はじめに、対象とする問題について整理し、続けて、MFSの定式化について説明した。その後、数値解析例を示した。計算結果の比較から、半無限領域における反射波を表現するためには、反射波の特徴を理解し、源点を適切に配置する必要があることを確認した。

今後は、引き続き半無限領域の取り扱いについて考察するため、点源から発生する波動の反射問題の解析を行う。また、部材表面近傍の欠陥や部材界面の剥離による入射波の散乱問題を対象に、MFSの適用可能性について検討を行う予定である。

参考文献

- 1) Fairweather, G., Karageorghis, A., Martin, P.A.: The method of fundamental solutions for scattering and radiation problems, *Eng. Anal. Bound. Elem.*, Vol.27, pp.759-769, 2003.
- 2) Achenbach, J.D.: *Wave Propagation in Elastic Solids*, Elsevier, 1975.