

# 多重解像度表現を用いた弾性波トモグラフィに対する ADMM の適用

Implementation of ADMM to elastic wave tomography using multi-resolution representation

北海道大学大学院工学院 ○ 学生員 堀合孝太郎 (Kohtaroh Horiai)  
北海道大学大学院工学研究院 正会員 古川陽 (Akira Furukawa)

## 1. はじめに

弾性波トモグラフィは、非破壊検査における内部可視化技術であり、土木構造物の検査に広く適用されている<sup>1)</sup>。弾性波トモグラフィでは、検査の対象領域に弾性波の発信点と受信点を配置し、各受信点で得られた観測波形に含まれる波動の伝播、透過、散乱情報をもとに検査領域内部の材料物性値分布を推定する。一般に、弾性波トモグラフィでは、材料物性値分布はセルの値によって表現される。このとき、セルの大きさ（分布の解像度に対応）は、弾性波の伝播経路の分布に制約を受ける。これに対して、著者らの研究グループでは、これまで多重解像度表現を用いた弾性波トモグラフィの開発に取り組んできた<sup>2)</sup>。しかし、高解像度の推定結果を得るためには、適切な解像度の選択が必要であった。

このような課題に対して、 $l^1$  ノルムを用いたスパースモデリングは、有効な解決方法を与えることが期待されている。 $l^1$  ノルムを用いた代表的な正則化手法として、ADMM（交互方向乗数法）が挙げられる。ADMM は地震波トモグラフィに対する適用例などが報告されており<sup>3)</sup>、多重解像度表現を用いた弾性波トモグラフィに対しても適用可能である。

以上を踏まえ、本研究では、ADMM を多重解像度表現を用いた弾性波トモグラフィに適用し、その基礎的な性質について整理する。次節以降では、まず多重解像度表現を用いた弾性波トモグラフィの定式化について示し、続けて ADMM について説明する。その後、数値解析例を示し、推定結果について整理する。なお、以下では特に断りのない限り、1つの項に繰り返し現れる下付き添え字に対して総和規約を適用する。

## 2. 多重解像度表現を用いた弾性波トモグラフィ

本節では、多重解像度表現を用いた弾性波トモグラフィの定式化について説明する。解析対象は2次元領域  $D$  とし、そのスローネス分布を推定する問題を考える。領域  $D$  内に配置された発信点から受信点までの縦波の到達時間  $t_i$  は、以下の式で表現される。

$$t_i = \int_{C_i} s(\mathbf{x}) dC(\mathbf{x}); \quad i = 1, 2, \dots, M \quad (1)$$

ここに、 $C_i$  は発信点と受信点を結ぶ縦波の伝播経路、 $M$  は伝播経路の総数を表す。また、 $s(\mathbf{x})$  は領域  $D$  内の位置  $\mathbf{x}$  におけるスローネスであり、以下の式で与えられる。

$$s(\mathbf{x}) = \frac{1}{v(\mathbf{x})} \quad (2)$$

ここに、 $v(\mathbf{x})$  は領域  $D$  内の位置  $\mathbf{x}$  における縦波の伝播速度を表す。

多重解像度表現を用いた弾性波トモグラフィでは、領域  $D$  内のスローネス分布を以下の式で与える。

$$s(\mathbf{x}) := \sum_{j=1}^N \tilde{b}_j^*(\mathbf{x}) \tilde{s}_j \quad (3)$$

ここに、 $\tilde{b}_j^*(\cdot)$  は2次元分布を与える基底関数であり、次式

で表現される。

$$\tilde{b}_j^*(\mathbf{x}) = \tilde{b}_k(x_1) \tilde{b}_l(x_2) \quad (4)$$

ただし、 $j = 2^J(k-1) + l$  および  $k, l = 1, 2, \dots, 2^J$  であり、 $J$  は最大解像度を表す。式 (4) において、 $\tilde{b}_k(\cdot)$  は以下の式で与えられる。

$$\tilde{b}_1(s) = \phi(s) \quad (5)$$

$$\tilde{b}_p(s) = \psi(2^m s - n); \quad p = 2^m + n + 1 \quad (6)$$

ただし、 $m = 0, 1, \dots, J-1$  および  $n = 0, 1, \dots, 2^m - 1$  である。また、 $\phi(\cdot)$  はスケール関数、 $\psi(\cdot)$  はマザーウェーブレットを表す。本研究では、これらの関数に Haar ウェーブレット<sup>4)</sup>を用いる。式 (3) を式 (1) に代入すれば、以下に示す連立1次方程式を得る。

$$t_i = \tilde{L}_{ij} \tilde{s}_j; \quad i = 1, 2, \dots, M \quad (7)$$

ここに、

$$\tilde{L}_{ij} = \int_{C_i} \tilde{b}_j^*(\mathbf{x}) dC(\mathbf{x}) \quad (8)$$

である。実際に式 (8) に示す係数行列  $\tilde{L}_{ij}$  を計算すると、いくつかの列ベクトルの  $l^2$  ノルムの値がゼロになる場合がある。本研究では、そのような列ベクトルを取り除いた以下の連立1次方程式<sup>2)</sup>を解析に用いる。

$$t_i = \tilde{L}_{ij}^c \tilde{s}_j; \quad i = 1, 2, \dots, M; \quad j = 1, 2, \dots, K \quad (9)$$

ただし、 $K \leq N$  となる。式 (9) を解くことで、領域  $D$  内のスローネス分布を求めることができる。

## 3. ADMM (交互方向乗数法)

ADMM<sup>5)</sup> では、一般化 LASSO と呼ばれる以下の最適化問題を取り扱う。

$$\underset{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N}{\text{minimize}} \quad \frac{1}{2} \|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2^2 + \lambda \|\mathbf{B}\mathbf{x}\|_1 \quad (10)$$

ただし、本研究では、

$$(\mathbf{x})_j := \tilde{s}_j^c, \quad (\mathbf{y})_i := t_i, \quad (\mathbf{A})_{ij} := \tilde{L}_{ij}^c, \quad \mathbf{B} := \mathbf{I} \quad (11)$$

とする。また、 $\lambda$  は正則化パラメータであり、 $\mathbf{I}$  は単位行列を表す。加えて、 $\|\cdot\|_p$  はベクトルの  $l^p$  ノルムを表す。ADMM では、初期値  $\mathbf{z}[0]$ 、 $\mathbf{v}[0]$  および正数  $\gamma (> 0)$  を与え、以下に示す計算をくり返し実行する。

$$\mathbf{x}[k+1] = \left[ \mathbf{A}^\top \mathbf{A} + \frac{1}{\gamma} \mathbf{B}^\top \mathbf{B} \right]^{-1} \left\{ \mathbf{A}^\top \mathbf{y} + \frac{1}{\gamma} \mathbf{B}^\top (\mathbf{z}[k] - \mathbf{v}[k]) \right\} \quad (12)$$

$$\mathbf{z}[k+1] = S_{\gamma\lambda}(\mathbf{B}\mathbf{x}[k+1] + \mathbf{v}[k]) \quad (13)$$

$$\mathbf{v}[k+1] = \mathbf{v}[k] + \mathbf{B}\mathbf{x}[k+1] - \mathbf{z}[k+1], \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (14)$$

式 (12) において、 $(\cdot)^\top$  は行列の転置、 $(\cdot)^{-1}$  は行列の逆行列を表す。また、式 (13) において、 $S_{\tau}(\cdot)$  はソフトしきい値作用素を表し、以下の式で与えられる。

$$S_{\tau}(v) = \begin{cases} v - \tau & : v \in [\tau, \infty) \\ 0 & : v \in (-\tau, \tau) \\ v + \tau & : v \in (-\infty, -\tau] \end{cases} \quad (15)$$

ここに、 $\tau$  はしきい値を表す。

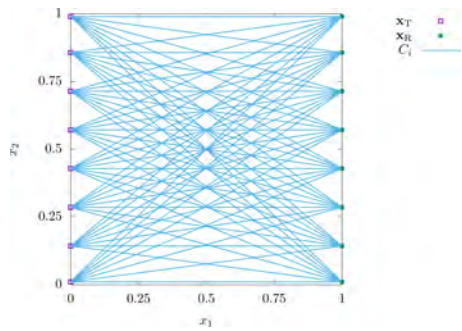


図-1 対象とする2次元領域  $D$  と発信点  $\mathbf{x}_T$ , 受信点  $\mathbf{x}_R$ , および伝播経路  $C_i$  の関係

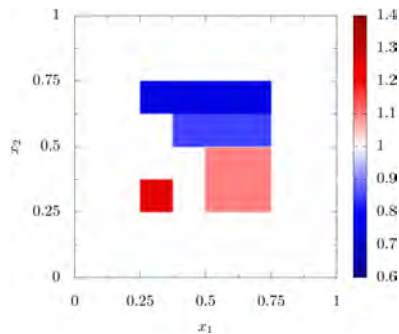


図-2 スローネス分布 (真値)

本研究では, ADMM の比較対象として, RLSM (正則化付き最小二乗法) についても取り扱う. RLSM による解は, 以下の式で与えられる<sup>5)</sup>.

$$\hat{\mathbf{x}} = [\mathbf{A}^T \mathbf{A} + \gamma_{\text{RLSM}} \mathbf{I}]^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{y} \quad (16)$$

ここに,  $\gamma_{\text{RLSM}}$  は正則化パラメータを表す.

#### 4. 数値計算例

数値計算例として, 2次元領域  $D$  ( $x_1 \in [0, 1], x_2 \in [0, 1]$ ) のスローネス分布の推定を行う. 図-1に, 対象とする2次元領域  $D$ , 発信点  $\mathbf{x}_T$ , 受信点  $\mathbf{x}_R$ , 伝播経路  $C_i$  を示す. 発信点  $\mathbf{x}_T$  と受信点  $\mathbf{x}_R$  はそれぞれ8個配置した.  $\mathbf{x}_T$  の  $x_1$  座標はすべて0,  $\mathbf{x}_R$  の  $x_1$  座標はすべて1とした.  $\mathbf{x}_T$  と  $\mathbf{x}_R$  の  $x_2$  座標はどちらも0.0100, 0.1428, 0.2857, 0.4285, 0.5714, 0.7142, 0.8571, 0.9900とした. 伝播経路の総数は  $M = 64$  とした. スローネス分布の最大解像度は  $J = 3$  とし, 未知数の数は  $N = 64$  とした. ADMM の正則化パラメータは  $\lambda = 10^{-1}, 10^{-3}, 10^{-5}$  とし, 正数は  $\gamma = 1$  とした. 一方, RLSM の正則化パラメータは  $\gamma_{\text{RLSM}} = 10^{-1}, 10^{-3}, 10^{-5}$  とした. 真値のスローネス分布は図-2で与えた.

解析結果として, 図-3にADMMおよびRLSMによって得られたスローネス分布を示す. 同図に示す結果から, ADMMでは, 正則化パラメータ  $\lambda$  の値が大きい場合には解像度の低いスローネス分布が,  $\lambda$  が小さい場合には解像度の高いスローネス分布が得られることがわかる. 一方, RLSMでは, このような傾向は確認できない. 以上より, ADMMのパラメータ  $\lambda$  によって, 多重解像度表現を用いた弾性波トモグラフィによって得られるスローネス分布の解像度を制御できることが確認された.

#### 5. おわりに

本研究では, 多重解像度表現を用いた弾性波トモグラフィにADMMを適用し, 2次元領域  $D$  のスローネス分布の推

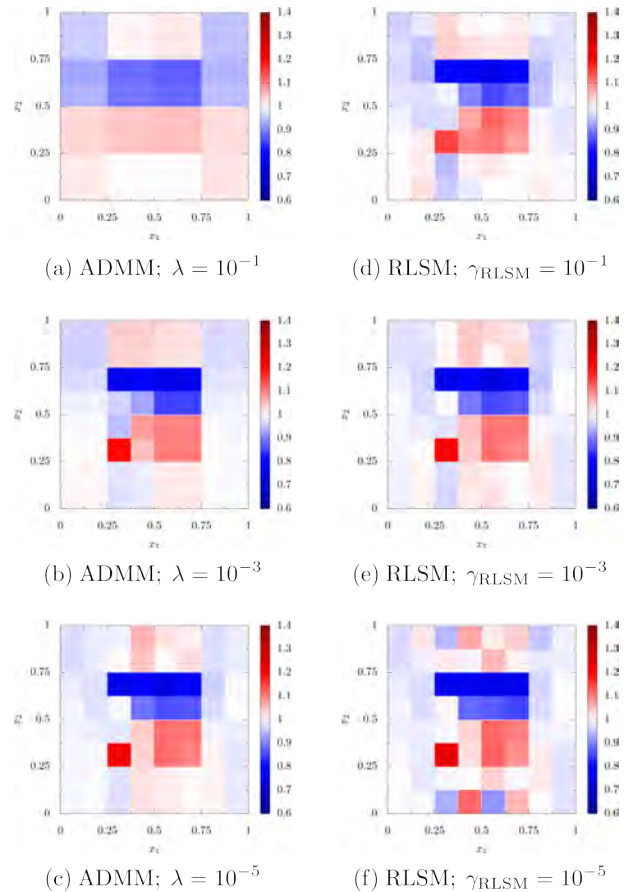


図-3 スローネス分布 (推定結果)

定を行った. はじめに, 多重解像度表現を用いた弾性波トモグラフィの定式化を示し, 続けて, ADMMの説明を行った. その後, 数値計算例としてスローネス分布の推定結果を示し, ADMMの基本的な性質について確認した. 今後は, スローネス分布を表現するための最大解像度を上げた問題に対して本稿に示した解析手法を適用し, 適切な解像度の選択方法について議論を行う予定である.

#### 参考文献

- 1) 桃木昌平: コンクリート構造物健全性評価のための弾性波トモグラフィ手法に関する研究, 京都大学博士学位論文, 2015.
- 2) 堀合孝太郎, 古川陽: Haar wavelet を用いた弾性波トモグラフィの開発, 土木学会北海道支部令和2年度年次技術研究発表会論文報告集第77号 (原稿番号: A-42), 2021.
- 3) Yamanaka, Y., Kurata, S., Yano, K., Komaki, F., Shiina, T., Kato, A.: Structured regularization based velocity structure estimation in local earthquake tomography for the adaptation to velocity discontinuities, *Earth Planets Space*, Vol.74, Article No.43, 2022.
- 4) 和田成夫: よくわかる信号処理, 森北出版, 2009.
- 5) 永原正章: スパースモデリング-基礎から動的システムへの応用-, コロナ社, 2017.