

# Sharp Interface Model のための二次精度圧力外挿計算の提案

A Proposal for Second-Order Accurate Pressure Extrapolation Calculation for Sharp Interface Model

北海道大学大学院工学研究科 ○学生員 土屋裕嵩 (Hirotaka Tsuchiya)

北海道大学大学院教授工学研究院 正会員 渡部靖憲 (Yasunori Watanabe)

## 1. はじめに

静水面上に風が吹くと、界面せん断力に駆動された吹送流が初期に発生し、その後、毛管波が生じ重力波へと発達する。この風波の発生・発達に関して、 $\mu\text{m}$ オーダーで変化する界面の質量境界層を実験的に計測することは非常に困難であり、数値的な解明が期待される。

固定グリッド系で水面計算を行う場合、これまでに大別して Diffused interface Model と Sharp interface Model の二つの計算モデルが使われてきた。Diffused interface Model は最も広く使われ、拡散界面が導入された混合モデルであり、密度、粘性係数、表面張力などの物理量が界面近傍で滑らかに変化するモデルである。このモデルでは計算の安定性が高い一方で非常に薄い界面境界層近傍の物性の違いから、界面両側での不安定性が失われる可能性がある。風波の発生・発達について考える際はこの界面境界層をトラッキングする必要があり、このモデルは適していない。これに対し Sharp interface Model は界面のジャンプ条件等の物理的合理性が保証される一方で、界面近傍での力学的境界条件の決定が複雑になるため、過去の適用は多くない。

風波の発生過程については、Sharp interface Model による数値的な再現が渡部ら<sup>1)</sup>によって既に行われている。渡部らによる風波の再現に用いられたモデルでは界面近傍での流速の外挿計算を高精度で行っており、運動学的なジャンプ条件の導入に成功しているが、力学的なジャンプ条件である界面を挟んだ圧力の外挿計算は一次精度で行われている。これにより圧力計算の精度が保たれず、風波の発達過程において水面形状が複雑になると、界面近くでの圧力が発散してしまう。また風波発生過程においても再現結果の妥当性が未だ裏付けられていないため、圧力計算の精度をより高める必要がある。

本稿は、これまでの風波を再現する Sharp interface model に、どのような界面形状においても正確な圧力を導出できるような圧力計算の手法を提案し、その計算手法の導入をしようとするものである。

## 2. 数値計算法

### (1) 支配方程式

本研究で用いるモデルでは、固定グリッド系においてナビエ・ストークス方程式を支配方程式とした3次元 Large Eddy Simulation を行う。気液混相流において液体、気体の運動は後に説明する境界条件の元、次の式により数値的

に解く。

$$\frac{Du^l}{Dt} = -\nabla \frac{p^l}{\rho^l} + \nu^l \nabla^2 u^l - \nabla \cdot \tau^l - g^l \quad (1)$$

$$\frac{Du^g}{Dt} = -\nabla \frac{p^g}{\rho^g} + \nu^g \nabla^2 u^g - \nabla \cdot \tau^g \quad (2)$$

ここで、 $u^l$ は液体の流速、 $p^l$ は液体の圧力、 $\nu^l$ は液体の動粘性係数、 $\rho^l$ は液体の密度、 $\tau^l$ は液体のサブグリッド応力、 $g^l$ は重力加速度、 $u^g$ は気体の流速、 $p^g$ は気体の圧力、 $\nu^g$ は気体の動粘性係数、 $\rho^g$ は気体の密度、 $\tau^g$ は気体のサブグリッド応力である。上式の計算方法の詳細は Watanabe et al. 2009<sup>2)</sup>を参照されたい。

### (2) 境界条件

気液の境界面では、両相の接線方向せん断力が等しくなるはずであり、この境界条件は次式で表される。

$$\begin{aligned} \mu^l \left( \sum \frac{\partial u_i^l}{\partial x_j} |_{s_j} n_i + \sum \frac{\partial u_i^l}{\partial x_j} |_{s_i} n_j \right) \\ = \mu^g \left( \sum \frac{\partial u_i^g}{\partial x_j} |_{s_j} n_i + \sum \frac{\partial u_i^g}{\partial x_j} |_{s_i} n_j \right) \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \mu^l \left( \sum \frac{\partial u_i^l}{\partial x_j} |_{s_j} t_i n_j + \sum \frac{\partial u_i^l}{\partial x_j} |_{s_i} t_j n_i \right) \\ = \mu^g \left( \sum \frac{\partial u_i^g}{\partial x_j} |_{s_j} t_i n_j + \sum \frac{\partial u_i^g}{\partial x_j} |_{s_i} t_j n_i \right) \end{aligned} \quad (4)$$

ここで、 $n$ は境界面に対する法線方向、 $s, t$ は境界面に対する接線方向を表しており、 $u_n, u_s, u_t$ はそれぞれ $n, s, t$ 方向の速度を表している。上式の導出や計算方法の詳細は、Watanabe et al. 2020<sup>1)</sup>を参照されたい。

### (3) 圧力の外挿計算手法

界面近傍での圧力外挿計算において、本研究では圧力のジャンプだけでなく(5)式によって圧力勾配のジャンプについても考慮することで、二次精度での圧力の外挿計算を行う。

$$[P] = [P]_s + (x - x_s) \left[ \frac{\partial P}{\partial x} \right]_s \quad (5)$$

ここで、 $[P]_s$ は界面での気体と液体の圧力のジャンプであり、 $[P]$ は界面近傍で外挿された気体と液体の圧力のジャンプである。また、圧力の微分は同一相での値である。

界面が気相のグリッド $i$ と液相のグリッド $i+1$ の間にある場合を考えると、(5)式は以下のようになる。

$$[P]_{i+1} = [P]_s + (x_{i+1} - x_s) \left[ \frac{\partial P}{\partial x} \right]_s \quad (6)$$

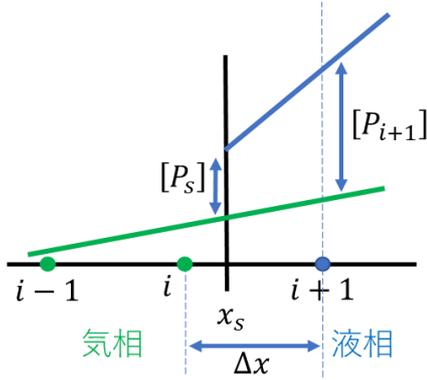


図 1, 界面が気相のグリッド*i*と液相のグリッド*i+1*の間にある場合の $[P]_s$ 及び $[P]_{i+1}$

この時、圧力の一階微分、及び圧力に関するポアソン方程式中の二階微分は以下ようになる。

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial P}{\partial x} \right|_{g,i} &= \frac{P_{g,i+1} - P_{g,i-1}}{2\Delta x} \\ &= \frac{P_{l,i+1} - [P]_{i+1} - P_{g,i-1}}{2\Delta x} \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} \right) \right|_{g,i} &= \frac{1}{\rho_g} \frac{P_{g,i+1} - 2P_{g,i} + P_{g,i-1}}{\Delta x^2} \\ &= \frac{1}{\rho_g} \frac{P_{l,i+1} - [P]_{i+1} - 2P_{g,i} + P_{g,i-1}}{\Delta x^2} \end{aligned} \quad (8)$$

(7)(8)式を解く際 $[P]_{i+1}$ が未定であるが、 $[P]_{i+1}$ の値は(6)式から以下の通りに導出していく。

(6)式中の $[P]_s$ はジャンプ条件で与えられる一方 $\left[ \frac{\partial P}{\partial x} \right]_s$ は未定であり、求める必要がある。界面上で速度は連続であるため、ナビエ・ストークス方程式中の $\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x}$ もまた界面で連続であることから、以下の式が成り立つ。

$$\left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} \right]_s = \frac{1}{\rho_l} \left. \frac{\partial P}{\partial x} \right|_{l,s} - \frac{1}{\rho_g} \left. \frac{\partial P}{\partial x} \right|_{g,s} = 0 \quad (9)$$

また、それぞれの相で外挿された圧力は連続していることから(10)式が成り立ち、これらの条件から(6)式を変形すると、(11)式となる。

$$\left. \frac{\partial P}{\partial x} \right|_{g,s} = \left. \frac{\partial P}{\partial x} \right|_{g,\frac{1}{2}} \quad (10)$$

$$[P]_{i+1} = \frac{\rho_g}{\rho^*} [P]_s + \frac{\rho^* - \rho_g}{\rho^*} (P_{l,i+1} - P_{g,i}) \quad (11)$$

ここで、 $\rho^* = \rho_l \frac{x_{i+1} - x_s}{\Delta x} + \rho_g \left( 1 - \frac{x_{i+1} - x_s}{\Delta x} \right)$ である。

(11)式を(7)(8)式に代入することによって、圧力の一階微分、及び圧力に関するポアソン方程式をガウスザイデル法による繰り返し計算で解いていく。また、界面の位置が気相のグリッド*i-1*と液相のグリッド*i*にある場合、また気相と液相の位置が反転した場合においても、上記の考えに基づき計算を行うことで、どのような界面形状においても界面近傍での圧力を正確に求められる。なお、全ての変数は領域長*L*、重力加速度*g*、水の密度 $\rho_l$ で無次元化され、以降無次元物理量をもって結果を論ずる。

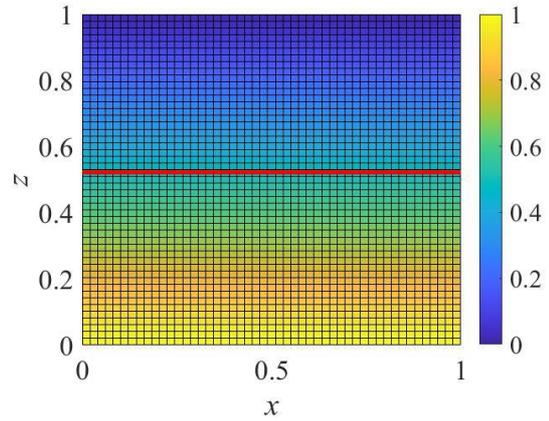


図 2. 静水状態の圧力計算における初期圧力分布.

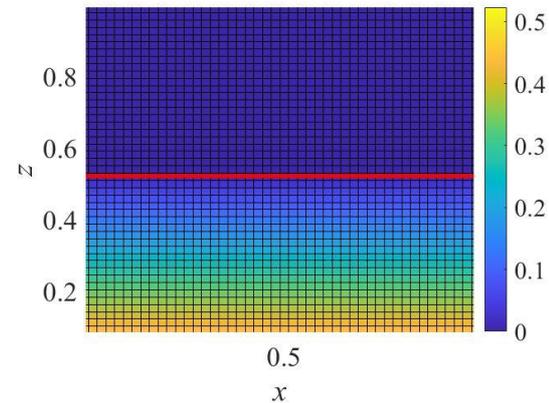


図 3. 静水状態の圧力計算における計算後の圧力分布.

### 3. 圧力計算の結果

#### (1) 静水状態

上記の圧力計算の妥当性を確かめるため、圧力についての計算のみを無次元長さ1.0×1.0の矩形領域において行った。領域の側面には周期条件が与えられ、底面境界にはnon-slip条件、天井境界には不透過slip条件が課せられる。計算グリッド数は、(x,z)方向に(50,50)である。水平な界面z = 0.505の位置で定義されており、初期において静圧力は図2のように、気相を含めた全領域で水の密度 $\rho_l = 1.0$ により分布が定められている。この時の圧力分布は $P(x,z) = 1.0 - \rho_l z$ であり、また界面形状は図の赤線で描画されている。本来であれば気相では気体の密度 $\rho_g = 1.0 \times 10^{-3}$ によって静圧力分布が得られるが、このように物理的に矛盾のある初期条件であっても圧力計算を行った結果、図3のように気相は気体の密度 $\rho_g$ 、液相は水の密度 $\rho_l$ による静圧力分布に収束することが示された。

#### (2) 微小振幅波

次に、界面形状を微小振幅波として計算を行う。初期圧力は静水状態で行った計算と、全領域で水の密度 $\rho_l$ により分布が定められている。(図4)水面形状が微小振幅波の場合においても圧力計算を行うことにより、図5のように圧力が物理的に矛盾のない分布に収束していることがわかる。

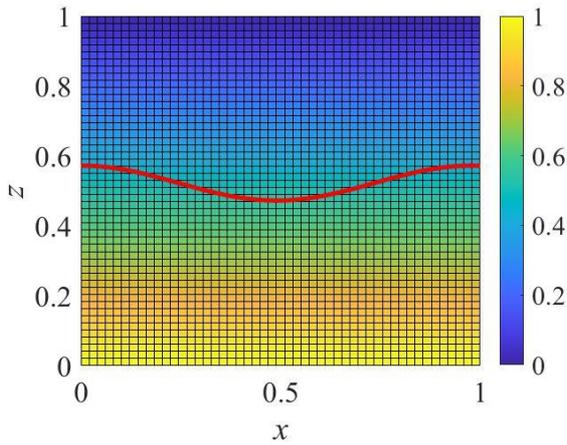


図 4. 微小振幅波の圧力計算における初期圧力分布.

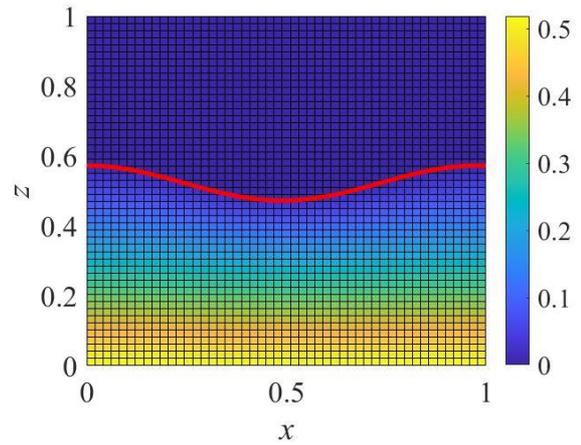


図 5. 微小振幅波の圧力計算における計算後の圧力分布.

#### 4. 結論

本稿では圧力の外挿計算を静水状態と微小振幅波の2つの場合で行い、それらの計算結果が本来の圧力分布と矛盾のない値を与えていることを確認した。今後は、本稿で

説明した計算手法を Sharp interface Model に導入することで風波の発生過程のみではなく発達過程を再現し、その発生・発達メカニズムを解明していく。

#### 参考文献

- 1) Watanabe, Y, Tsuchiya, H : 気液境界層流れの相互作用を経た風波の発生機構. (2020)
- 2) Watanabe, Y, Saruwatari, A, D. M. Ingram : Scarifying and fingering surfaces of plunging jets. (2009)