

異方性材料の面外波動場に対する Sinc 関数近似

Sinc approximation for anti-plane wavefield of anisotropic materials

北海道大学工学部 ○ 学生員 佐藤健 (Ken Sato)
北海道大学工学研究院 正会員 古川陽 (Akira Furukawa)

1. はじめに

異方性材料は、材料の力学的性質が方向に依存して変化する材料であり、その代表例には、繊維強化プラスチックや木材などが挙げられる。異方性材料内部を伝播する波動は、その力学的性質に対応して複雑な波面を形成することが知られており、非破壊評価において適切な取り扱いが要求される。異方性材料の波動場は、基本解を用いて計算することができる。基本解は、数値シミュレーションや逆解析とも親和性が高く、様々な解析手法に援用されている。一方で、異方性材料の波動問題に対する基本解は、一般的に閉じた形式で表現することが困難であり、積分形式で与えられる。そのため、数値計算においては、この積分を数値的に処理する必要がある、計算時間を要することが知られている。

以上を踏まえ、本研究では、異方性材料の面外波動問題を対象に、基本解によって表現される波動場の計算効率の改良について検討する。本稿では、誤差の収束性や数学的な取り扱いに優れた Sinc 関数¹⁾を用いて、面外波動場を近似する方法を開発する。以下では、特に断りのない限り、1つの項の中に繰り返し現れる下付き添え字に対して総和規約を適用する。また、ギリシャ文字による下付き添え字は、1, 2をとるものとする。

2. 異方性材料の面外波動場

本研究では、異方性材料の面外波動場を、変位に関する周波数領域基本解によって表現する。基本解 $\tilde{U}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ は、以下の式で与えられる。

$$\tilde{U}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{8\pi^2} \int_{|\mathbf{p}|=1} \frac{\phi(k_{qS2} |\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}|)}{\Gamma_{33}(\mathbf{p})} dl(\mathbf{p}) \quad (1)$$

ここに、 \mathbf{x} は観測点、 \mathbf{y} は源点を表し、 $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{y}$ である。加えて、

$$\Gamma_{33}(\mathbf{p}) = C_{3\beta 3\delta} p_\beta p_\delta; \quad \mathbf{p} = [p_1 \ p_2]^T \quad (2)$$

$$k_{qS2}^2 = \frac{\rho \omega^2}{\Gamma_{33}(\mathbf{p})} \quad (3)$$

$$\phi(\xi) = e^{-i\xi} E_1(-i\xi) + e^{i\xi} \{E_1(i\xi) + i\pi\} \quad (4)$$

である。ただし、 $i = \sqrt{-1}$ であり、 $[\]^T$ はベクトルの転置を表す。また、 ω は角周波数を表し、 $E_1(\cdot)$ は指数積分を表す。さらに、 ρ , $C_{3\beta 3\delta}$ は、異方性材料の密度と弾性定数を表す。なお、式(1)に示す基本解 $\tilde{U}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ には、単位円周 ($|\mathbf{p}| = 1$) 上の積分が含まれており、本研究ではこの積分を数値的に処理する。

本稿では、計算対象とする異方性材料の面外波動場として、解析領域 D を以下のように定義する。

$$D = \{\mathbf{x} \mid x_1 \in (a_1, b_1), x_2 \in (a_2, b_2)\} \quad (5)$$

ただし、 $a_\alpha < b_\alpha$ であり、源点は $\mathbf{y} \notin D$ を満たすように設定する。

3. Sinc 関数近似と面外波動場の計算への適用

本研究では、DE-Sinc 関数近似を用いて、異方性材料の面外波動場の近似計算を行う。本節では、まず1変数関数の DE-Sinc 関数近似について説明し、その後、異方性材料

の面外波動場の近似方法について説明する。

3.1 DE-Sinc 関数近似

無限区間 $x \in (-\infty, \infty)$ に対して定義された関数 $F(x)$ に対する Sinc 関数近似は、以下のように表現される。

$$F(x) \approx \sum_{j=-N}^N F(jh) S(j, h)(x) \quad (6)$$

ここに、 h は刻み幅を表し、関数 $S(j, h)(x)$ は次式で定義される。

$$S(j, h)(x) = \text{sinc}\left(\frac{x-j}{h}\right) \quad (7)$$

ただし、

$$\text{sinc}(x) = \begin{cases} \frac{\sin \pi x}{\pi x} & : x \neq 0 \\ 1 & : x = 0 \end{cases} \quad (8)$$

である。

次に、有限区間 $s \in (a, b)$ に対して定義された関数 $f(s)$ に対する Sinc 関数近似について考える。ただし、 $a < b$ とする。本研究では、変数変換に DE 変換²⁾を用いた DE-Sinc 関数近似を用いる。無限区間 $x \in (-\infty, \infty)$ と有限区間 $s \in (a, b)$ の変換公式は、以下の式で与えられる。

$$s = \psi_{a,b}^{\text{DE}}(x) = \frac{b-a}{2} \tanh\left(\frac{\pi}{2} \sinh(x)\right) + \frac{b+a}{2} \quad (9)$$

$$x = \{\psi_{a,b}^{\text{DE}}\}^{-1}(s)$$

$$= \ln \left[\frac{1}{\pi} \ln \left(\frac{s-a}{b-s} \right) + \sqrt{1 + \left\{ \frac{1}{\pi} \ln \left(\frac{s-a}{b-s} \right) \right\}^2} \right] \quad (10)$$

これらの変換公式を用いれば、関数 $f(s)$ に対する DE-Sinc 関数近似は、以下のように表現できる¹⁾。

$$f(s) \approx \sum_{j=-N}^N f(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(jh)) S(j, h)(\{\psi_{a,b}^{\text{DE}}\}^{-1}(s)) \quad (11)$$

3.2 DE-Sinc 関数近似を用いた面外波動場の表現

続いて、DE-Sinc 関数近似を用いた異方性材料の面外波動場の表現について説明する。本研究では、2次元領域である解析領域 D における面外波動場(変位)を、以下に示す変数分離型の関数によって表現する。

$$g(\mathbf{x}(\mathbf{s})) \approx f_1(x_1(s_1)) f_2(x_2(s_2)); \quad \mathbf{x}(\mathbf{s}) \in D \quad (12)$$

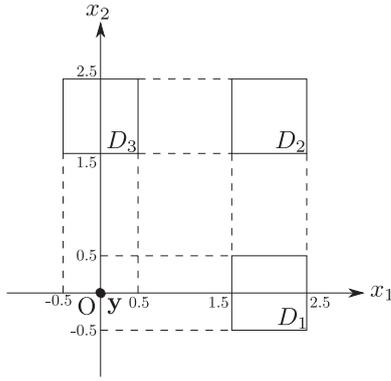
ただし、 $\mathbf{s} (= [s_1 \ s_2]^T)$ は解析領域 D における局所座標を表し、 $s_\alpha \in (-1, 1)$ である。

DE-Sinc 関数近似を用いれば、関数 $g(\cdot)$ は、次式で表現できる。

$$g(\mathbf{x}(\mathbf{s})) = \sum_{j=-N_1}^{N_1} \sum_{l=-N_2}^{N_2} g_{jl} b_{jl}(\mathbf{s}) \quad (13)$$

ここに、 $b_{jl}(\cdot)$ は近似に用いる基底関数に対応し、以下の式で与えられる。

$$b_{jl}(\mathbf{s}) = \phi_{1;j}(s_1) \phi_{2;l}(s_2) \quad (14)$$


 図-1 解析領域 D_i ($i = 1, 2, 3$) と源点 \mathbf{y} の位置

ただし,

$$\phi_{1;j}(s_1) = \mathcal{B}^{\text{DE}}(j, h_1)(s_1) \quad (15)$$

$$\phi_{2;i}(s_2) = \mathcal{B}^{\text{DE}}(i, h_2)(s_2) \quad (16)$$

および,

$$\mathcal{B}^{\text{DE}}(j, h)(s) = S(j, h)(s) \quad (17)$$

である. なお, h_α は x_α 軸方向に関する刻み幅を表す. また, 式 (13) において, g_{jl} は標本点における関数の代表値を表す. 本研究では, この値は基本解によって計算される面外波動場に対応する. そのため, g_{jl} は以下の式で表現することができる.

$$g_{jl} = \tilde{U}(\mathbf{x}(s_{jl}^{\text{DE}}), \mathbf{y}) \quad (18)$$

ここに, 標本点 s_{jl}^{DE} は次式で与えられる.

$$\mathbf{s}_{jl}^{\text{DE}} = \begin{Bmatrix} s_{1;j}^{\text{DE}} \\ s_{2;i}^{\text{DE}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \psi_{-1,1}^{\text{DE}}(jh_1) \\ \psi_{-1,1}^{\text{DE}}(lh_2) \end{Bmatrix} \quad (19)$$

解析領域 D における任意の位置での面外波動場 (変位) は, 式 (13) によって計算される. そのため, DE-Sinc 関数近似を用いた場合は, 基本解の計算回数 (標本点数) は $N_s = (2N_1 + 1)(2N_2 + 1)$ を超えることはない.

本研究では, 基本解を用いて直接計算された波動場と DE-Sinc 関数近似を用いて計算された波動場の比較を行う. このとき, 以下に示す絶対誤差の最大値を考察に用いる.

$$E_{\max} = \max_{i=1,2,\dots,N^{\text{obs}}} E(\mathbf{x}_i^{\text{obs}}) \quad (20)$$

ただし, $N^{\text{obs}} = N_1^{\text{obs}} N_2^{\text{obs}}$ であり,

$$E(\mathbf{x}) = |g(\mathbf{x}) - \tilde{U}(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \quad (21)$$

とする. なお, 源点 \mathbf{y} はあらかじめ与えられるものとする. また, $\mathbf{x}_i^{\text{obs}} (= [x_{i;1}^{\text{obs}} \ x_{i;2}^{\text{obs}}]^T)$ は面外波動場を表現する観測点であり, 次式で与える.

$$x_{i;\alpha}^{\text{obs}} = \frac{b_\alpha - a_\alpha}{2} s_{i;\alpha}^{\text{obs}} + \frac{b_\alpha + a_\alpha}{2} \quad (22)$$

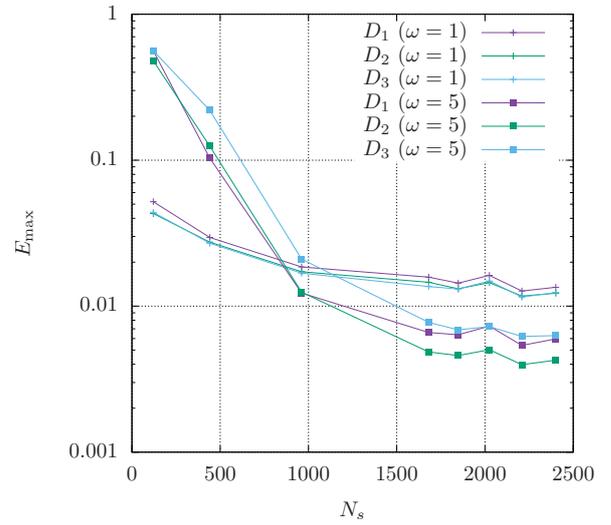
ただし, $s_{i;\alpha}^{\text{obs}}$ は以下に示す通りである.

$$s_{i;\alpha}^{\text{obs}} = (i - 0.5)\Delta s_\alpha - 1, \Delta s_\alpha = \frac{2}{N_\alpha^{\text{obs}}} \quad (23)$$

なお, 本研究では $N_s < N^{\text{obs}}$ とする.

4. 数値計算例

本節では, 前述の方法を用いて, 異方性材料の面外波動場の計算を行い, その結果を比較する. 図-1 に, 解析対象とする領域 D_i ($i = 1, 2, 3$) を示す. 同図に示す通り, 面外波動場を与える基本解の計算において, 源点は $\mathbf{y} = [0 \ 0]^T$ とする. また, 角周波数は $\omega = 1, 5$ を用いる. 解析に用いる異方性材料は, グラファイトエポキシとした. グラファイトエポキシの密度は $\rho = 1600$ [kg/m³] であり, 弾性定数


 図-2 絶対誤差の最大値 E_{\max} と標本点数 N_s の関係

(単位: [GPa]) は以下の通りである.

$$C_{pq} = \begin{bmatrix} 95.5 & 28.9 & 4.03 & 0 & 0 & 44.7 \\ & 25.9 & 4.65 & 0 & 0 & 15.6 \\ & & 16.3 & 0 & 0 & 0.54 \\ & & & 4.40 & -1.78 & 0 \\ \text{sym.} & & & & 6.45 & 0 \\ & & & & & 32.7 \end{bmatrix} \quad (24)$$

DE-Sinc 関数近似における標本点の計算では,

$$N_1 = N_2 = 5, 10, 15, 20, 21, 22, 23, 24 \quad (25)$$

とした. 加えて, 面外波動場を表現する観測点の数は,

$$N^{\text{obs}} = 2500; N_1^{\text{obs}} = N_2^{\text{obs}} = 50 \quad (26)$$

とした.

計算結果として, 図-2 に絶対誤差の最大値 E_{\max} と標本点数 N_s の関係を示す. 同図に示す結果から, 全体的な傾向として, N_s の増加に伴い, E_{\max} が減少する傾向が確認された. また, それぞれの角周波数において, 解析領域 D_i の違いが E_{\max} の収束には強い影響を及ぼさないことが確認できる. これは, グラファイトエポキシ内部を伝播する波動の波長が伝播方向に大きく影響を受けない (異方性の影響がそれほど強くない) ためであると考えられる.

5. おわりに

本研究では, 異方性材料の面外波動場に対して, DE-Sinc 関数近似を用いた数値計算手法を開発した. はじめに, 異方性材料の面外波動問題の変位に関する周波数領域基本解 $\tilde{U}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ を示し, 続けて, 面外波動場に対する DE-Sinc 関数近似の適用方法を説明した. その後, 数値計算例として, グラファイトエポキシを対象に絶対誤差の最大値 E_{\max} と標本点数 N_s の関係を示した. 今後は, グラファイトエポキシ以外の異方性材料についても, 同様の検証を行う. 加えて, 計算時間の比較も行い, 本手法の有効性を検討する.

参考文献

- 岡山友昭: 第二種積分方程式に対する Sinc 数値計算法, 東京大学博士論文, 2010.
- 森正武: 二重指数関数型変換のすすめ, 数理解析研究所講究録, Vol.1040, pp.143-153, 1998.