

基本解近似解法に対するマッチング追跡アルゴリズムの適用

Implementation of matching pursuit algorithm to the method of fundamental solutions

北海道大学工学部 ○ 学生員 坂井友哉 (Tomoya Sakai)
 北海道大学工学研究院 正会員 古川陽 (Akira Furukawa)

1. はじめに

基本解近似解法 (MFS; the method of fundamental solutions) は、メッシュフリー型の数値シミュレーション手法であり、波動問題をはじめとする様々な問題に適用されている¹⁾。この手法は近似解の表現に支配方程式の基本解を用いており、解析における未知量の数が少なく済むこと、数値計算の実装が容易なことが特徴である。一方で、基本解近似解法による解析では、基本解の源点の配置が計算結果に影響を及ぼすことが知られている。これまでに源点位置の決定を解法に組み込む方法も提案されているが、その場合、非線形最適化問題を解く必要があり、計算が複雑になる。

スパースモデリングは、劣決定問題に対して疎な近似解を与えるモデリング手法である。スパースモデリングの解法のひとつとして、マッチング追跡アルゴリズム²⁾がある。この手法は l^0 最適化に分類され、貪欲法に基づく基底ベクトルの選択を繰り返し行う。マッチング追跡アルゴリズムを基本解近似解法に適用することで、源点の選択と求解を同時に実現可能となることが期待できる。

以上の背景を踏まえ、本研究では、等方弾性体の面外波動散乱問題を対象に、マッチング追跡アルゴリズムを用いた基本解近似解法の開発を行う。以下では、まず、提案する解析手法について説明する。その後、数値解析例を示し、得られる近似解の傾向をまとめる。これ以降は、特に断りのない限り、1つの項の中に繰り返し現れる下付き添え字に対して総和規約を適用する。また、ギリシャ文字による下付き添え字は1, 2をとるものとする。

2. 提案する解析手法

2.1 対象とする問題

本研究では、等方で均質な線形弾性体の面外波動散乱問題について考える。図-1に、解析対象とする外部領域 V と散乱体を示す。この図において、 ∂V は散乱体の境界、 V_C は補領域を表す。周波数領域における等方性弾性体の運動

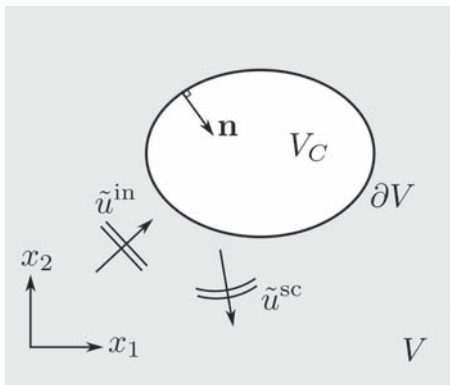


図-1 対象とする問題

方程式は、物体力をゼロと仮定すると、以下の式で与えられる。

$$\mu \frac{\partial^2 \tilde{u}(\mathbf{x})}{\partial x_\beta \partial x_\beta} + \rho \omega^2 \tilde{u}(\mathbf{x}) = 0 \quad (1)$$

ここに、 $\tilde{u}(\mathbf{x})$ は位置 $\mathbf{x}$ における面外方向変位、 ω は角周波数を表す。また、 μ, ρ は弾性体のせん断弾性係数と密度を示す。なお、 $\tilde{u}(\mathbf{x})$ は重ね合わせの原理により、以下の関係式を満たすものとする。

$$\tilde{u}(\mathbf{x}) = \tilde{u}^{\text{in}}(\mathbf{x}) + \tilde{u}^{\text{sc}}(\mathbf{x}); \mathbf{x} \in V \cup \partial V \quad (2)$$

ここに、 $\tilde{u}^{\text{in}}(\mathbf{x})$ は入射波による変位、 $\tilde{u}^{\text{sc}}(\mathbf{x})$ は散乱波による変位を表す。ただし、入射波は既知とし、散乱波は放射条件を満たすものとする。

上述の波動散乱問題は、式(1)に適切な境界条件を与えることで解くことができる。変位固定問題の場合、境界条件は次式で与えられる。

$$\tilde{u}(\mathbf{x}) = 0; \mathbf{x} \in \partial V \quad (3)$$

一方、表面力フリー問題の場合、境界条件は次式で与えられる。

$$\tilde{t}(\mathbf{x}) = \mu \frac{\partial \tilde{u}}{\partial n_x}(\mathbf{x}) = 0; \mathbf{x} \in \partial V \quad (4)$$

ただし、 $\partial/\partial n_x$ は、境界 ∂V 上での法線方向微分を表す。

2.2 マッチング追跡アルゴリズムを用いた基本解近似解法

前節に示した波動散乱問題に対して、提案手法による解法を示す。基本解近似解法では、領域内部および境界上の変位を次式で表現する。

$$\tilde{u}(\mathbf{x}) := \tilde{u}^{\text{in}}(\mathbf{x}) + \sum_{k=1}^N \tilde{U}(\mathbf{x}, \mathbf{y}_k) \tilde{c}_k \quad (5)$$

ここに、 $\mathbf{x} \in V \cup \partial V$ および $\mathbf{y}_k \in V_C$ である。また、係数 $\tilde{c}_k$ は境界条件によって決定される。加えて、 $\tilde{U}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ は、式(1)に示す運動方程式に対する基本解であり、次式で与えられる。

$$\tilde{U}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{i}{4\mu} H_0^{(1)}(k_T r) \quad (6)$$

ここに、 $\mathbf{x}$ は観測点、 $\mathbf{y}$ は源点を表す。また、 k_T は面外波動の波数、 $H_n^{(1)}$ は n 次の第一種 Hankel 関数を表す。なお、 $r = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ および $i = \sqrt{-1}$ である。

式(5)に示す表示式を用いれば、境界 ∂V 上の表面力は、以下のように表現できる。

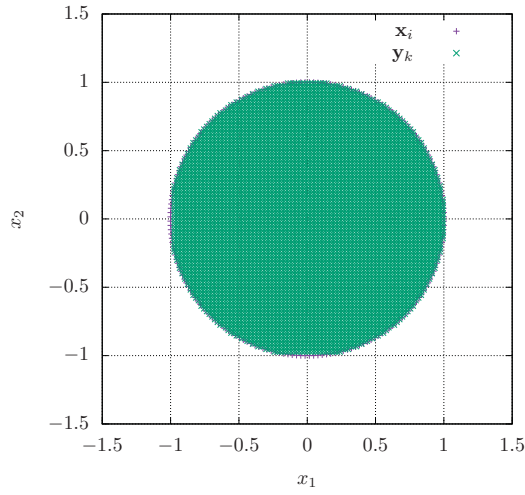
$$\tilde{t}(\mathbf{x}) := \tilde{t}^{\text{in}}(\mathbf{x}) + \sum_{k=1}^N \tilde{T}(\mathbf{x}, \mathbf{y}_k) \tilde{c}_k \quad (7)$$

ただし、 $\tilde{T}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ は表面力に対する基本解であり、次式で与えられる。

$$\tilde{T}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mu \frac{\partial \tilde{U}}{\partial n_x}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\frac{i}{4\mu} H_1^{(1)}(k_T r) \frac{\partial r}{\partial x_\beta} n_\beta \quad (8)$$

ここに、 n_β は境界 ∂V 上の外向き単位法線ベクトルを表す。

本研究では、散乱体の境界 ∂V 上に選点 $\mathbf{x}_i$ ($i = 1, 2, \dots, M$)を配置し、その選点上で境界条件を満たすように係数 $\tilde{c}_k$ を決定する。このとき、解くべき方程式は以下


 図-2 選点 $\mathbf{x}_i$ と源点 $\mathbf{y}_k$ の配置

の通りとなる.

$$\tilde{D}_{ik}\tilde{c}_k = \tilde{h}_i; \quad i = 1, 2, \dots, M \quad (9)$$

ここに,

$$\tilde{D}_{ik} = \begin{cases} \tilde{U}(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_k) & : \text{変位固定問題} \\ \tilde{T}(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_k) & : \text{表面力フリー問題} \end{cases} \quad (10)$$

および,

$$\tilde{h}_i = \begin{cases} -\tilde{u}^{\text{in}}(\mathbf{x}_i) & : \text{変位固定問題} \\ -\tilde{t}^{\text{in}}(\mathbf{x}_i) & : \text{表面力フリー問題} \end{cases} \quad (11)$$

である. 式 (9) を解くことで, 未知の係数 $\tilde{c}_k$ を求めることができる.

本研究では, マッチング追跡アルゴリズムを式 (9) の求解に用いる. マッチング追跡アルゴリズムの計算手順については, 文献²⁾を参考にした. ただし, 本研究では, k 回目の反復計算において, 以下に示す収束判定を導入する.

$$\|\mathbf{x}[k]\|_2 - \|\mathbf{x}[k-1]\|_2 < \epsilon_{\text{MP}} \text{ or } k = N_{\text{MP}} \quad (12)$$

ここに, $\mathbf{x}[k]$ は k 回目の反復計算で得られた未知量ベクトル, $\|\cdot\|_2$ はベクトルの l^2 ノルムを表す. また, $\epsilon_{\text{MP}} > 0$ および $N_{\text{MP}} \geq M$ とする.

3. 数値解析例

本稿では, 等方性弾性体の面外波動散乱問題のうち, 波動関数展開³⁾ (WFE; wave function expansion) による解析解が存在する問題を用いて, 提案手法の検証を行う. この問題では, 散乱体は, 原点を中心とする半径 $a = 1$ の円とする. また, 入射波は以下に示す平面波で与える.

$$\tilde{u}^{\text{in}}(\mathbf{x}) = \exp[ik^{\text{in}}x_1] \quad (13)$$

ただし, 入射波の波数は $k^{\text{in}} = 1$ とした. また, 解析に用いる選点 $\mathbf{x}_i$ の数は $M = 200$, 源点 $\mathbf{y}_k$ の数は $N = 7991$ とし, その配置は図-2の通りとした. 同図に示すように, 源点 $\mathbf{y}_k$ は散乱体の内部に密に配置した. その他のパラメータは $k_T = \omega\sqrt{\rho/\mu} = 1$ となるように設定した. マッチング追跡アルゴリズムの収束判定では, $\epsilon_{\text{MP}} = 10^{-12}$ および $N_{\text{MP}} = 50000$ とした.

提案手法によって得られた近似解と, 波動関数展開によって得られる解析解の比較を行う. 図-3 に変位固定問題における境界値の計算結果を示す. 同図において, 近似解は解析解と同様の傾向を示しているが, 多くの点において解析解との誤差が確認できる. また, 図-4 に表面力フリー問題における境界値の計算結果を示す. この結果では, 近似解

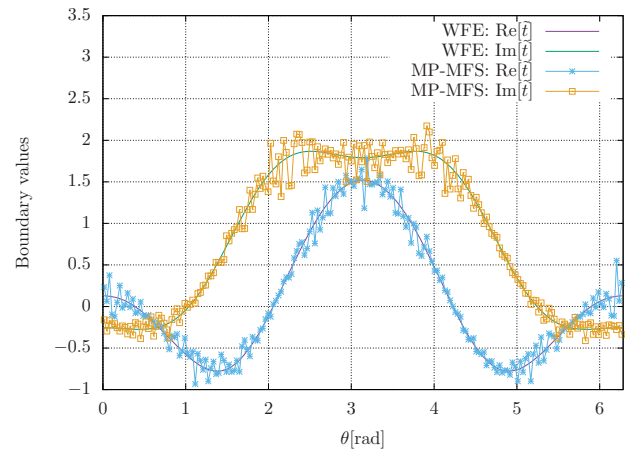


図-3 変位固定問題における境界値の比較 (WFE: 波動関数展開, MP-MFS: 提案手法)

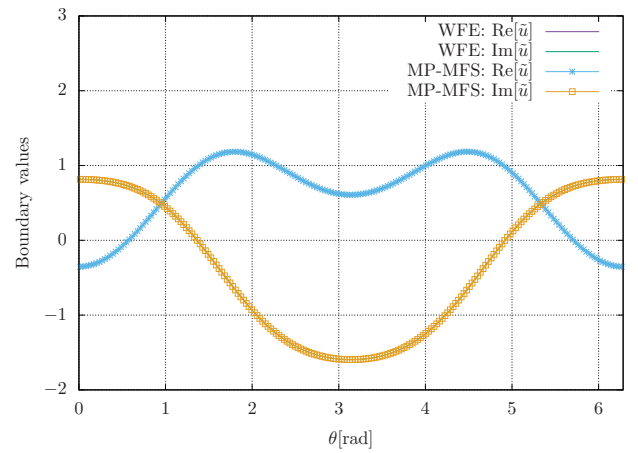


図-4 表面力フリー問題における境界値の比較 (WFE: 波動関数展開, MP-MFS: 提案手法)

は解析解と良く一致していることが確認できる.

4. おわりに

本研究では, マッチング追跡アルゴリズムを用いた基本解近似解法を提案し, 等方性弾性体の面外波動散乱問題に適用した. はじめに, 対象とする問題について示し, 続けて, 提案手法の定式化について説明した. その後, 数値解析例として, 提案手法による近似解と波動関数展開による解析解の比較を行った. その結果, 変位固定問題と表面力フリー問題で, 近似解の傾向が異なることを確認した.

今後は, 提案手法によって得られた係数 $\tilde{c}_k$ の空間分布から, 近似解を構成する源点の選択傾向について考察を行う予定である.

参考文献

- 1) Fairweather, G., Karageorghis, A., Martin, P.A.: The method of fundamental solutions for scattering and radiation problems, *Eng. Anal. Bound. Elem.*, Vol.27, pp.759-769, 2003.
- 2) 永原正章: スパースモデリング-基礎から動的システムへの応用-, コロナ社, 2004.
- 3) Pao, Y.H., Mow, C.C.: *Diffraction of Elastic Waves and Dynamic Stress Concentrations*, Crane, Russak, New York, USA, 1973.