

仮想ラミナを用いる Region-wise ZIG-ZAG 理論 の計算効率について

Computational efficiency of Region-wise ZIG-ZAG theory using virtual laminas

函館工業高等専門学校 正 員 渡辺 力 (Chikara WATANABE)
函館工業高等専門学校 学生会員 佐野凌希 (Ryoki SANO)

1. まえがき

複合材料で補強された鋼やコンクリート構造に ZIG-ZAG 理論を適用するために、改良 ZIG-ZAG 理論¹⁾と Layer-wise 理論を融合させた Region-wise ZIG-ZAG 理論の開発を進めている²⁾。この理論は、有限要素法に組み入れるための数学モデルであり、積層構造を板厚方向に幾つかの領域に分け、その領域境界と領域内部に自由度を持たせる。領域内部の ZIG-ZAG 変位を効率的に表すために、高次の改良 ZIG-ZAG 理論を用いている。これにより、剥離解析での剥離変位の導入や、複合材料と等方性材料からなるサンドイッチ構造への適用が容易となり、解析に必要な未知自由度数は Layer-wise 理論に比べてかなり少なくなる。

しかしながら、この理論では領域数を増やすと未知自由度数が増加し、各層を1つの領域としてモデル化する場合には、未知自由度数は Layer-wise 理論と同程度となる。本研究では、Region-wise ZIG-ZAG 理論の効率性をさらに高めるために、異方性積層構造に対して仮想ラミナを用いる方法の適用する。仮想ラミナを用いる方法は改良 ZIG-ZAG 理論を等方性平板に用いるために開発したものであるが、これを Region-wise ZIG-ZAG 理論に適用するために、異方性積層に対する領域 ZIG-ZAG 関数の勾配を新たに導出している³⁾。

本報告では、領域数を層数と同じになるように設定した異方性積層板の厚板解析に仮想ラミナを用いる Region-wise ZIG-ZAG 理論を用いて、仮想ラミナの効果を調べ、Layer-wise 理論と計算効率（未知自由数）を比較した結果について報告する。

2. Region-wise ZIG-ZAG 理論

2.1 変位場

板厚 h の異方性積層板あるいはサンドイッチ板を板厚方向に対して N_R 個の領域に分ける。領域 r 第 k 層の変位を次式で与える。

$$\begin{aligned} u^{r(k)} &= f_0^r u_r + f_1^r u_{r+1} + \sum_{s=1}^{p_u^r} \phi_{us}^{r(k)} u_s^r \\ v^{r(k)} &= f_0^r v_r + f_1^r v_{r+1} + \sum_{s=1}^{p_v^r} \phi_{vs}^{r(k)} v_s^r \end{aligned}$$

$$w^{r(k)} = f_0^r w_r + f_1^r w_{r+1} + \sum_{s=1}^{p_w^r} \phi_{ws}^{r(k)} w_s^r \quad (1)$$

ここに、式 (1) の右辺第 1 項と第 2 項が領域境界変位の項で、第 3 項が領域内部変位の項である。 s は板厚方向 (ζ^r 方向) の補間関数 (多項式) の次数を表し、 p_u^r, p_v^r, p_w^r は各変位成分の領域 r での展開次数を表す。また、領域内部変位の項 (式 (1) の右辺第 3 項) において、 $s=1$ の場合が ZIG-ZAG 項で、 $\phi_{u1}^{r(k)}, \phi_{v1}^{r(k)}, \phi_{w1}^{r(k)}$ が領域 ZIG-ZAG 関数、 u_1^r, v_1^r, w_1^r が領域 ZIG-ZAG 変位である。

2.2 領域 ZIG-ZAG 関数とその勾配

式 (1) の領域内部変位の項 $s=1$ の関数 $\phi_{u1}^{r(k)}$ などには、次の領域 ZIG-ZAG 関数を用いる。

$$\left. \begin{aligned} \phi_{u1}^{r(k)} &= (\beta_u^{r(k)} - F_u^r/2) \zeta^r + a_u^{r(k)} \\ \phi_{v1}^{r(k)} &= (\beta_v^{r(k)} - F_v^r/2) \zeta^r + a_v^{r(k)} \\ \phi_{w1}^{r(k)} &= (\beta_w^{r(k)} - F_w^r/2) \zeta^r + a_w^{r(k)} \end{aligned} \right\} \quad (k=1, 2, \dots, N_r) \quad (2)$$

式 (2) の $\beta_u^{r(k)}, \beta_v^{r(k)}, \beta_w^{r(k)}$ は領域 r 第 k 層の領域 ZIG-ZAG 関数の勾配で、異方性積層構造ならびに仮想ラミナに対して次式を用いる。

(1) 異方性積層に対する勾配

領域 r 内において、面外せん断弾性定数 $\overline{Q}_{55}^{r(k)}, \overline{Q}_{44}^{r(k)}$ の値に異なる層がある異方性積層の場合には、次の勾配を用いる。

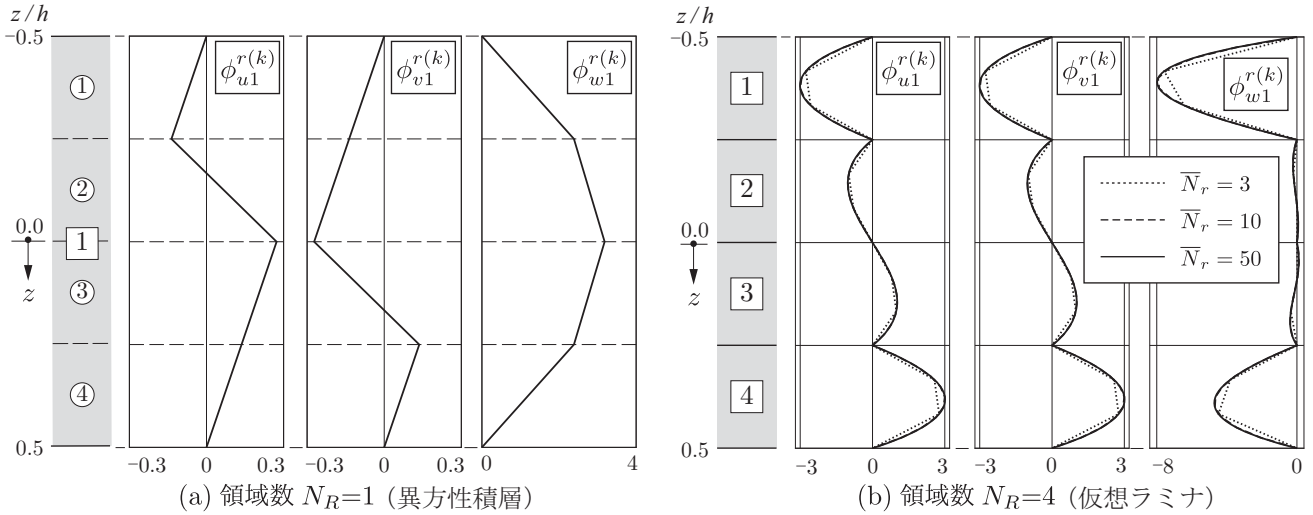
$$\left. \begin{aligned} \beta_u^{r(k)} &= G_u^r / \overline{Q}_{55}^{r(k)}, \quad \beta_v^{r(k)} = G_v^r / \overline{Q}_{44}^{r(k)} \\ \beta_w^{r(k)} &= -\frac{1}{\overline{Q}_{33}^{r(k)}} \left(\overline{Q}_{55}^{r(k)} \beta_u^{r(k)} + \nu_{12}^r \overline{Q}_{44}^{r(k)} \beta_v^{r(k)} \right) c_{z1}^{r(k)} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

ここに、

$$G_u^r = \left(\frac{1}{h_r} \sum_{k=1}^{N_r} \frac{h^{r(k)}}{\overline{Q}_{55}^{r(k)}} \right)^{-1}, \quad G_v^r = \left(\frac{1}{h_r} \sum_{k=1}^{N_r} \frac{h^{r(k)}}{\overline{Q}_{44}^{r(k)}} \right)^{-1} \quad (4)$$

$$c_{z1}^{r(k)} = h_r \{ (\zeta_k^r + \zeta_{k+1}^r) / 4 + \bar{z}_m^r \} \quad (5)$$

式 (4) の G_u^r, G_v^r は領域 r 全層の面外せん断弾性定数の重み付き平均で、 ν_{12}^r はポアソン比、 N_r は領域 r の層数である。


 図-1 異方性積層板（逆対称4層積層板 $[0/90^\circ/0/90^\circ]$ ）に用いる領域 ZIG-ZAG 関数の分布

(2) 仮想ラミナならびに等方性材料に対する勾配

領域 r 内において、面外せん断弾性定数 $\bar{Q}_{55}^{r(k)}, \bar{Q}_{44}^{r(k)}$ の値が全層同じとなる場合（層数 $N_r=1$ あるいは等方性材料）には次式を用いる³⁾。

$$\begin{aligned}\beta_u^{r(k)} &= \frac{G_u^r}{\bar{Q}_{55}^{r(k)}} c_{z2}^{r(k)}, & \beta_v^{r(k)} &= \frac{G_v^r}{\bar{Q}_{44}^{r(k)}} c_{z2}^{r(k)} \\ \beta_w^{r(k)} &= -\frac{1}{\bar{Q}_{33}^{r(k)}} \left(\bar{Q}_{55}^{r(k)} + \nu_{12}^r \bar{Q}_{44}^{r(k)} \right) c_{z3}^{r(k)}\end{aligned}\quad (6)$$

ここに、

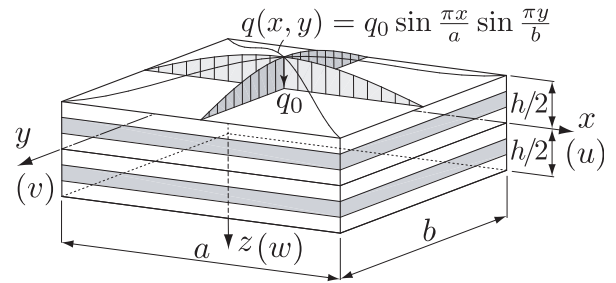
$$\begin{aligned}c_{z2}^{r(k)} &= \left\{ 3 - \zeta_k^2 - \zeta_k^r \zeta_{k+1}^r - \zeta_{k+1}^{r2} \right. \\ &\quad \left. - 6 \bar{z}_m^r (\zeta_k^r + \zeta_{k+1}^r + 2 \bar{z}_m^r) \right\} / 3 \\ c_{z3}^{r(k)} &= h_r (\zeta_k^r + \zeta_{k+1}^r + 4 \bar{z}_m^r) \\ &\quad \left\{ 6 - \zeta_k^2 - \zeta_{k+1}^{r2} - 4 (\zeta_k^r + \zeta_{k+1}^r) \bar{z}_m^r \right. \\ &\quad \left. - 8 \bar{z}_m^{r2} \right\} / 24\end{aligned}\quad (7)$$

本研究では、領域内の層数 $N_r=1$ の場合に、領域内に仮想的な数学層を設けて精度の改善を図る。この仮想的な数学層を仮想ラミナと呼び、このときの層数 N_r は仮想ラミナ数 $\bar{N}_r$ として区別する ($N_r \equiv \bar{N}_r$)。また、仮想ラミナに対しては、式 (2) の領域 ZIG-ZAG 関数の勾配に、式 (6) を用いる。

2.3 仮想ラミナによる精度の改善

図-1 には逆対称4層積層板 $[0/90^\circ/0/90^\circ]$ において領域数 $N_R=1, 4$ とした場合の式 (2) の領域 ZIG-ZAG 関数の板厚方向の分布図を示す。仮想ラミナ数 $\bar{N}_r$ は 3, 10, 50 に採っており、図-1(a) は領域数 $N_R=1$ として異方性積層の勾配（式 (3)）を用いた場合で、図-1(b) が領域内の層数 $N_r=1$ となるように領域を設定し式 (6) の勾配を用いた場合である。

式 (2) の領域 ZIG-ZAG 関数は領域内で ZIG-ZAG となる変位分布を表すための関数であり、異方性積層の


 図-2 異方性積層板 ($h/b = 3/10$)

場合にはこの関数を用いて、図-1(a) のように領域内で ZIG-ZAG となる変位分布を表現できる。一方、式 (6) の勾配を用いると図-1(b) のように面内変位 u, v の領域 ZIG-ZAG 関数の分布は中央面に対して逆対称な曲線分布となる。

これにより、式 (1) の ZIG-ZAG 項 ($s=1$) において、面内変位 u, v には中央面に対して逆対称となる変位を導入することになる。しかし、この関数は各仮想ラミナにおいて区間的に連続する ζ^r に関する 1 次式であるので折れ線分布であり、仮想ラミナ数が少ないと関数の近似度が悪くなる。それに対して、仮想ラミナ数 $\bar{N}_r$ を増加させると関数の近似度が増し、これにより解の精度が改善されることになる。

2.4 級数解法による定式化

本研究の Region-wise ZIG-ZAG 理論は、有限要素法に組み込むために開発を進めているものであるが、離散化誤差や丸め誤差の影響を含めずに理論自体（数学モデル）の精度を検証するために、仮想ラミナを用いた Region-wise ZIG-ZAG 理論による周辺単純支持直交積層板の三次元応力解析を級数解法を用いて定式化する。

表-1 対称4層積層板 $[0/90^\circ]_S$ の変位と応力の誤差 ($N_R=4$, $h/b=3/10$) (%)

p	$\bar{N}_r$	u	v	w	σ_x	σ_y	τ_{xy}	τ_{yz}^*	τ_{xz}^*	DOF
1	3	-2.06	-1.14	-0.74	-1.80	-1.89	-1.40	0.31	-0.44	27
	10	-0.66	-0.33	-0.33	-0.53	-0.46	-0.43	-0.15	-0.28	
	20	-0.56	-0.27	-0.29	-0.45	-0.34	-0.35	-0.18	-0.26	
	50	-0.53	-0.25	-0.28	-0.44	-0.29	-0.33	-0.19	-0.26	
2	3	-1.09	-0.64	-0.42	-0.91	-0.86	-0.77	-0.84	-0.65	39
	10	-0.61	-0.27	-0.20	-0.49	-0.28	-0.37	-0.29	-0.32	
	20	-0.26	-0.11	-0.08	-0.18	-0.10	-0.15	-0.10	-0.13	
	50	-0.06	-0.02	-0.02	-0.01	-0.02	-0.03	-0.02	-0.03	
LW	$p=1$	-11.77	-6.73	-3.59	-11.03	-11.50	-8.16	-22.19†	-2.43†	15
	$p=2$	-1.11	-0.68	-0.44	-0.95	-0.93	-0.80	13.09†	-0.15†	27
	$p=3$	-0.01	-0.005	-0.003	0.03	0.02	-0.01	-1.42†	-0.04†	39
厳密解 ⁴⁾		2.923817 ($\tilde{u} \times 1000$)	7.339311 ($\tilde{v} \times 1000$)	2.731683 ($\tilde{w} \times 100$)	-8.148298 ($\tilde{\sigma}_x \times 10$)	-7.150071 ($\tilde{\sigma}_y \times 10$)	5.373761 ($\tilde{\tau}_{xy} \times 100$)	3.022959 ($\tilde{\tau}_{yz} \times 10$)	2.005407 ($\tilde{\tau}_{xz} \times 10$)	-
評価点		D, $z=-h/2$	C, $z=-h/2$	A, $z=-h/2$	A, $z=-h/2$	A, 2層目上	B, $z=-h/2$	C, $z=0$	D, $z=0$	-

† Layer-wise 理論の面外せん断応力は、層境界の平均値を用いている。

表-2 逆対称4層積層板 $[0/90^\circ]_2$ の変位と応力の誤差 ($N_R=4$, $h/b=3/10$) (%)

p	$\bar{N}_r$	u	v	w	σ_x	σ_y	τ_{xy}	τ_{yz}^*	τ_{xz}^*	DOF
1	3	-2.04	-1.06	-0.70	-1.79	-1.83	-1.35	-0.43	-0.36	27
	10	-0.69	-0.33	-0.34	-0.56	-0.41	-0.44	-0.44	-0.41	
	20	-0.59	-0.27	-0.32	-0.48	-0.27	-0.37	-0.45	-0.41	
	50	-0.56	-0.25	-0.31	-0.46	-0.23	-0.35	-0.45	-0.41	
2	3	-1.12	-0.69	-0.46	-0.94	-0.97	-0.81	-0.77	-0.74	39
	10	-0.60	-0.28	-0.21	-0.47	-0.31	-0.37	-0.33	-0.32	
	20	-0.25	-0.11	-0.08	-0.18	-0.10	-0.15	-0.13	-0.13	
	50	-0.06	-0.02	-0.02	-0.01	-0.01	-0.03	-0.02	-0.02	
LW	$p=1$	-11.38	-5.651	-2.914	-10.69	-10.19	-7.35	-5.17†	-7.60†	15
	$p=2$	-1.15	-0.732	-0.484	-0.98	-1.05	-0.86	11.84†	10.59†	27
	$p=3$	-0.01	-0.004	-0.002	0.03	0.02	-0.01	-0.57†	-0.54†	39
厳密解 ⁴⁾		3.053017 ($\tilde{u} \times 1000$)	7.251844 ($\tilde{v} \times 1000$)	2.780261 ($\tilde{w} \times 100$)	-8.485094 ($\tilde{\sigma}_x \times 10$)	-6.582170 ($\tilde{\sigma}_y \times 10$)	5.395613 ($\tilde{\tau}_{xy} \times 100$)	2.173244 ($\tilde{\tau}_{yz} \times 10$)	2.300846 ($\tilde{\tau}_{xz} \times 10$)	-
評価点		D, $z=-h/2$	C, $z=-h/2$	A, $z=-h/2$	A, $z=-h/2$	A, 2層目上	B, $z=-h/2$	C, $z=0$	D, $z=0$	-

† Layer-wise 理論の面外せん断応力は、層境界の平均値を用いている。

3. 数値計算例

3.1 計算モデル

計算モデルは、図-2に示す長さ a 、幅 b 、板厚 h の周辺単純支持された異方性積層板で、形状比を $a/b=1$ 、板厚比を $h/b=3/10$ とし、次の7ケースの積層板を計算する。

- 1) モデル S3; 対称3層積層板 $[0/90^\circ/0]$
- 2) モデル S4; 対称4層積層板 $[0/90^\circ]_S$
- 3) モデル AS4; 逆対称4層積層板 $[0/90^\circ]_2$
- 4) モデル S6; 対称6層積層板 $[0/90^\circ/0]_2$
- 5) モデル AS6; 逆対称6層積層板 $[0/90^\circ]_3$
- 6) モデル S12; 対称12層積層板 $[0/90^\circ]_{3S}$
- 7) モデル AS12; 逆対称12層積層板 $[0/90^\circ]_6$

各層の厚さは全て同じとし、材料定数には次の値を用いる。

$$E_1/E_2 = 25, \quad E_3 = E_2, \quad G_{12} = G_{13} = 0.5E_2$$

$$G_{23} = 0.2E_2, \quad \nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{23} = 0.25$$

荷重は、図-2に示すように板上縁に正弦荷重 ($q=q_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}$) を満載する。変位と応力は、図-3の図中に示す評価点で評価し、無次元化して表す。また、領域の採り方については、領域の層数 $N_r=1$ となるように各層を1つの領域として設定し、3層積層板で $N_R=3$ 、4層積層板で $N_R=4$ 、6層積層板では $N_R=6$ 、12層積層板では $N_R=12$ とし、式(1)の展開次数は $p_u^r = p_v^r = p_w^r = p$ とする。

3.2 仮想ラミナの効果

表-1にモデル S4 (対称4層積層板)、表-2にモデル AS4 (逆対称4層積層板) における変位の3成分と応力の5成分の厳密解⁴⁾ に対する誤差 (%) と、未知自由度 (DOF) を示している。変位場の採り方は、展開次数を $p=1, 2$ とし、各領域の仮想ラミナ数は $\bar{N}_r=3 \sim 50$ まで採っている。また、比較のために、 p 次補間する Layer-wise 理論 (LW) の解⁵⁾ も示している。

本計算モデルでは、各層を1つの領域としてモデル化しているので、変位場に低次式を用いても高精度の解が得られる。表-1の対称4層積層板では、次数 $p=1$ (27DOF)において仮想ラミナ数 $\bar{N}_r=3$ で、変位で1~2%程度、応力でも2%程度の誤差が生じている。仮想ラミナ数 $\bar{N}_r$ を増加させると精度が改善され、 $\bar{N}_r=10$ を用いると変位、応力ともに誤差は1%以下となっている。次数 $p=2$ でも同様に、仮想ラミナ数 $\bar{N}_r=10$ を用いれば全ての変位と応力が1%以下の誤差となっている。

一方、Layer-wise理論では、誤差を1%以下にするためには $p=3$ (39DOF)を用いる必要があり、仮想ラミナを用いるRegion-wise ZIG-ZAG理論($p=1, 27\text{DOF}$)では、Layer-wise理論($p=3, 39\text{DOF}$)の69%の未知自由度で誤差1%以下の解を計算できている。

積層順序を変えた表-2の逆対称4層積層板においても同様に仮想ラミナの効果が現れており、誤差は表-1と同程度となっている。

3.3 Layer-wise理論との計算効率の比較

ここでは、変位と応力の厳密解に対する誤差を1%以下とするための未知自由度数をLayer-wise理論と比較し、仮想ラミナを用いるRegion-wise ZIG-ZAG理論の計算効率について考察する。

図-3は、7つの計算モデルについて、変位の3成分と応力の5成分の厳密解⁴⁾に対する誤差を1%以下とするための未知自由度数をLayer-wise理論と比較したもので、横軸には各計算モデルを、縦軸には未知自由度数(DOF)を示している。変位と応力の評価点については表-1, 2の下段に示しており、各成分の最大値の厳密解に対する誤差を評価している。

図より、Layer-wise理論(実線)では、層数が増えると誤差を1%以下とするための未知自由度数が大きく増加している。これは、各層を1つの領域としてモデル化したRegion-wise ZIG-ZAG理論でも同様である。一方、仮想ラミナを用いたRegion-wise ZIG-ZAG理論において、次数 $p=1$ の場合(点線)ではLayer-wise理論(実線)の約70%程度の未知自由度数で誤差1%以下の解が得られているが、次数 $p=2$ の場合(破線)にはLayer-wise理論と同じ未知自由度数となっている。

以上のことから、Region-wise ZIG-ZAG理論において、各層を1つの領域としてモデル化する場合には、次数 $p=1$ を用いて仮想ラミナを用いる方法を適用すれば、Layer-wise理論よりも効率的に高精度な解を計算できる。

4. まとめ

仮想ラミナを用いるRegion-wise ZIG-ZAG理論を7つの異方性積層板(3層~12層)の三次元応力解析に適用し、仮想ラミナの効果を調べ、変位と応力の厳密

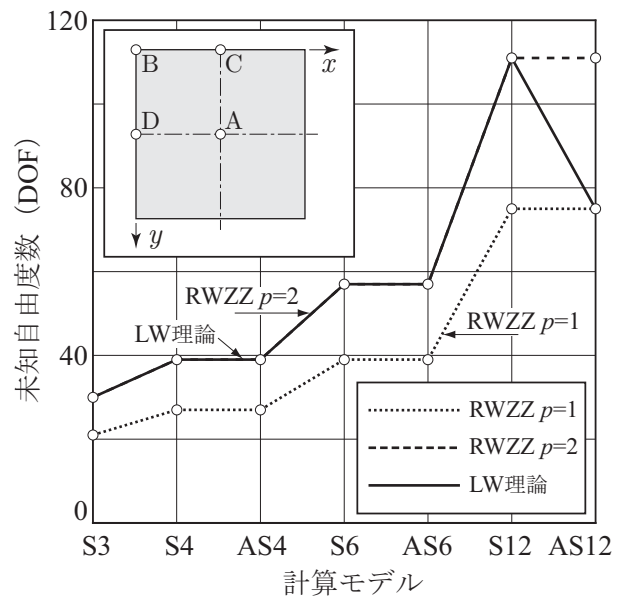


図-3 異方性積層板 ($h/b = 3/10$)

解に対する誤差を1%以下とするための未知自由度数をLayer-wise理論と比較した。

どの計算モデルにおいても仮想ラミナを増加させると変位と応力の誤差が減少しており、仮想ラミナを用いる方法は異方性積層板に対しても効果があることを確認した。

また、Region-wise ZIG-ZAG理論において、各層を1つの領域としてモデル化する場合には、次数 $p=1$ を用いて仮想ラミナを用いる方法を適用すれば、Layer-wise理論の70%程度の未知自由度数で、厳密解に対する誤差が1%以下となる高精度な変位と応力を計算できる。

謝辞： 本研究はJSPS 科研費 JP19K04586の補助を受けた。ここに、記して感謝の意を表する。

参考文献

- 1) 渡辺 力：効果的なZIG-ZAG関数の開発と異方性積層板ならびに等方性平板の厚板解析への適用，土木学会論文集A2(応用力学)，Vol.74, No.1, pp.75-91, 2018.
- 2) 渡辺 力：複合材料ならびに等方性材料からなる積層構造のためのRegion-wise ZIG-ZAG理論の開発，土木学会論文集A2(応用力学)，Vol.76, No.1, pp.58-74, 2020.
- 3) 渡辺 力，佐野凌希：Region-wise ZIG-ZAG理論による異方性積層板の厚板解析への仮想ラミナの適用，土木学会論文集A2(応用力学論文集)，2021(掲載予定)。
- 4) Pagano, N. J. : Exact solutions for rectangular bidirectional composites and sandwich plates, *J. Compos. Mater.*, Vol.4, pp.20-34, 1970.
- 5) 渡辺 力，佐野凌希：Layer-wise理論ならびに改良ZIG-ZAG理論による異方性積層板の曲げ解析，土木学会北海道支部論文報告集，第76号，A-42, 2020.