

# 異方性積層板の厚板解析における Region-wise ZIG-ZAG 理論 の計算効率について

Computational efficiency of Region-wise ZIG-ZAG theory for thick plate analysis of anisotropic laminated plates.

函館工業高等専門学校 学生員 佐野凌希 (Ryoki SANŌ)  
函館工業高等専門学校 正員 渡辺 力 (Chikara WATANABE)

## 1. まえがき

近年、接着工法による既設構造物の補修・補強において、繊維強化プラスチック (FRP) などの複合材料が盛んに用いられているが、異方性積層板として取り扱われる複合材料に対して有効な構造解析手法や解析理論は未だ確立されていない。繊維強化プラスチック (FRP) などの異方性積層板では、板厚比が大きくなると ZIG-ZAG 変位の影響が顕著に現れ、従来の等価単層理論では高次理論を用いても精度が悪くなる。そのため、ZIG-ZAG 理論や Layer-wise 理論などの様々な理論 (数学モデル) の研究が行われている。

複合材料で補強された鋼やコンクリート構造に ZIG-ZAG 理論を適用するために改良 ZIG-ZAG 理論<sup>1)</sup>が開発されている。この改良 ZIG-ZAG 理論は、Refined ZIG-ZAG 理論を改良したもので、等方性平板に用いても精度の良い解が得られる。さらに、この理論を剥離解析やサンドイッチ構造に適用するために、Region-wise ZIG-ZAG 理論の開発を進めている<sup>2)</sup>。この理論では、積層構造を幾つかの領域に分け、その領域境界と領域内部に自由度を持たせる。領域内部の ZIG-ZAG 変位を効率的に表現するために、高次の改良 ZIG-ZAG 理論を用いている。

本研究では、Region-wise ZIG-ZAG 理論を種々の積層状態の異方性積層板の曲げ解析に適用し、変位と応力の精度を検証するとともに、理論の計算効率を調べることを目的としている。

本報告では、Region-wise ZIG-ZAG 理論を 7 ケース (3 層~12 層) の異方性積層板の曲げ解析に用いて、厳密解に対する変位と応力の精度を調べ、Layer-wise 理論と計算効率 (未知自由度数) を比較した結果について報告する。

## 2. Region-wise ZIG-ZAG 理論

板厚  $h$  の異方性積層板やサンドイッチ板を、図-1 に示すように板厚方向に対して  $N_R$  個の領域に分ける。

領域  $r$  の領域境界の  $z$  座標値を  $z_r, z_{r+1}$  とし、領域内の層数を  $N_r$ 、領域の厚さを  $h_r$ 、第  $k$  層目の厚さを  $h^{r(k)}$  とする。また、領域内に変域  $[-1, 1]$  の正規化座標  $\zeta^r$  を設ける。

$$\zeta^r = \frac{2}{h^r} (z - z_m^r), \quad z_m^r = (z_{r+1} + z_r) / 2 \quad (1)$$

ここに、式(1)の  $z_m^r$  は領域  $r$  の中央点の  $z$  座標値である。

## 2.1 変位場

Region-wise ZIG-ZAG 理論では、領域  $r$  第  $k$  層の変位を次式で与える。

$$\left. \begin{aligned} u^{r(k)} &= f_0^r u_r + f_1^r u_{r+1} + \sum_{s=1}^{p_u^r} \phi_{us}^{r(k)} u_s^r \\ v^{r(k)} &= f_0^r v_r + f_1^r v_{r+1} + \sum_{s=1}^{p_v^r} \phi_{vs}^{r(k)} v_s^r \\ w^{r(k)} &= f_0^r w_r + f_1^r w_{r+1} + \sum_{s=1}^{p_w^r} \phi_{ws}^{r(k)} w_s^r \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

ここに、式(2)の右辺第 1 項と第 2 項が領域境界変位の項で、第 3 項が領域内部変位の項である。 $u_r, u_{r+1}$  などは図-1 に示す領域  $r$  の境界変位で、 $u_s^r, v_s^r, w_s^r$  は領域  $r$  の内部変位を表す。 $s$  は板厚方向 ( $\zeta^r$  方向) の補間関数 (多項式) の次数を表し、 $p_u^r, p_v^r, p_w^r$  は各変位成分の領域  $r$  での展開次数を表す。

領域内部変位の項 (式(2)の右辺第 3 項) において、 $s=1$  の場合が ZIG-ZAG 項で、 $\phi_{u1}^{r(k)}, \phi_{v1}^{r(k)}, \phi_{w1}^{r(k)}$  が領域 ZIG-ZAG 関数、 $u_1^r, v_1^r, w_1^r$  が領域 ZIG-ZAG 変位である。また、 $s \geq 2$  の場合が領域高次変位の項で、 $u_s^r, v_s^r, w_s^r$  ( $s \geq 2$ ) は領域内部変位の高次項である。

## 2.2 補間関数と領域 ZIG-ZAG 関数

### (1) 領域境界

領域境界変位の補間関数には次式を用いる。

$$f_0^r = \frac{1}{2} (1 - \zeta^r), \quad f_1^r = \frac{1}{2} (1 + \zeta^r) \quad (3)$$

### (2) 領域内部 $s=1$ (領域 ZIG-ZAG 関数)

領域内部変位の項  $s=1$  の関数には、次の領域 ZIG-ZAG 関数を用いる。この領域 ZIG-ZAG 関数は、改良 ZIG-ZAG 関数において領域下端の関数値がゼロとなるように補正を行ったもので、領域上端と領域下端で関数値はゼロとなる。

$$\left. \begin{aligned} \phi_{u1}^{r(k)} &= (\beta_u^{r(k)} - F_u^r / 2) \zeta^r + a_u^{r(k)} \\ \phi_{v1}^{r(k)} &= (\beta_v^{r(k)} - F_v^r / 2) \zeta^r + a_v^{r(k)} \\ \phi_{w1}^{r(k)} &= (\beta_w^{r(k)} - F_w^r / 2) \zeta^r + a_w^{r(k)} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

ここに、

$$a_u^{r(k)} = (\beta_u^{r(1)} - F_u^r / 2) + \sum_{i=2}^k \zeta_i^r (\beta_u^{r(i-1)} - \beta_u^{r(i)})$$

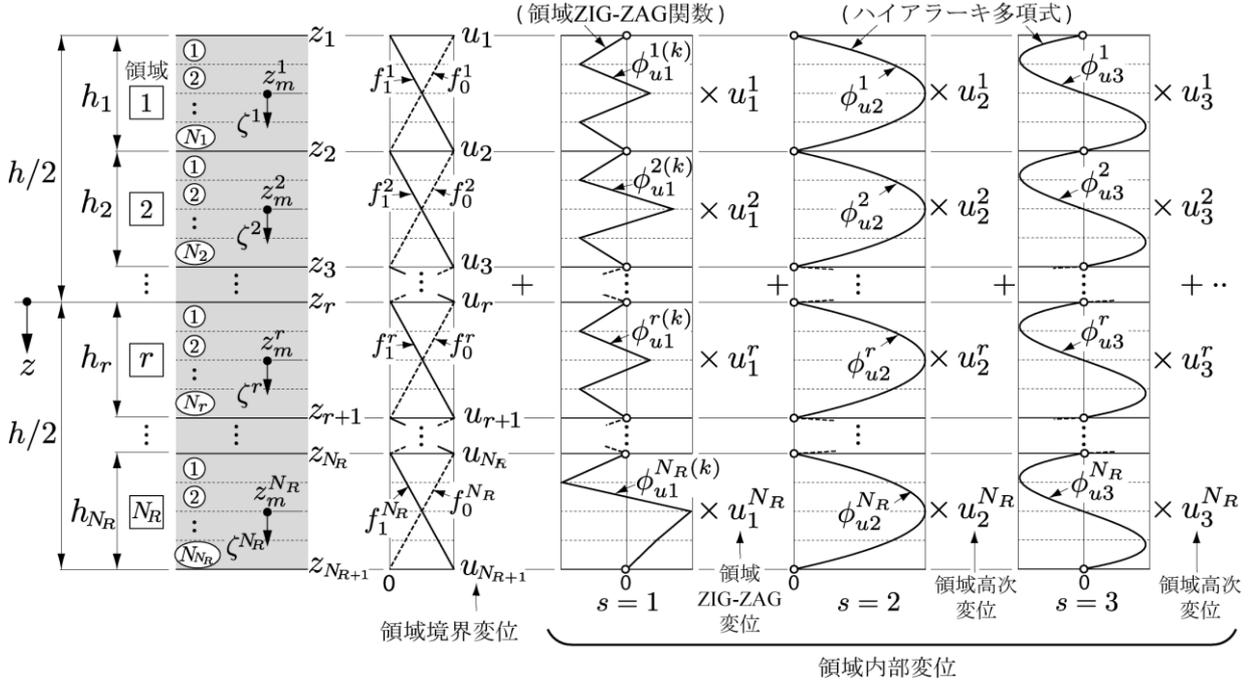


図-1 Region-wise ZIG-ZAG 理論の概念

$$\begin{aligned}
 a_v^{r(k)} &= (\beta_v^{r(1)} - F_v^r/2) + \sum_{i=2}^k \zeta_i^r (\beta_v^{r(i-1)} - \beta_v^{r(i)}) \\
 a_w^{r(k)} &= (\beta_w^{r(1)} - F_w^r/2) + \sum_{i=2}^k \zeta_i^r (\beta_w^{r(i-1)} - \beta_w^{r(i)}) \quad (5)
 \end{aligned}$$

式(4),(5) の  $\beta_u^{r(k)}, \beta_v^{r(k)}, \beta_w^{r(k)}$  は領域 ZIG-ZAG 関数の勾配である。

(3) 領域内部  $s \geq 2$

領域内部変位の項  $s \geq 2$  の補間関数には、領域上下端で関数値がゼロの条件を満たすハイアラーキ多項式を用いる。Layer-wise 理論では補間関数に Lagrange 多項式が用いられるが、このハイアラーキ多項式は数値計算が容易で、この多項式を用いた剛性行列の条件数は Lagrange 多項式を用いた場合に比べ小さく、消去演算での桁落ちが少なくなる。

$$\begin{aligned}
 \phi_{us}^r &= \phi_{vs}^r = \phi_{ws}^r \\
 &= (1 - (\zeta^r)^2)^s (\zeta^r)^{s-2} \quad (s \geq 2) \quad (6)
 \end{aligned}$$

なお、式(6)の関数は領域  $r$  内において層番号  $k$  に依存しないので、右上添字  $(k)$  を省略している。

3. 数値計算例

3.1 計算モデル

計算モデルは、図-2 に示す長さ  $a$ 、幅  $b$ 、板厚  $h$  の周辺単純支持された異方性積層板で、形状比を  $a/b=1$ 、板厚比を  $h/b=0.3$  とし、次の7ケースの積層板を計算する。

- 1) モデル S3 ; 対称 3 層積層板  $[0/90^\circ/0]$
- 2) モデル S4 ; 対称 4 層積層板  $[0/90^\circ]_S$
- 3) モデル AS4 ; 逆対称 4 層積層板  $[0/90^\circ]_2$
- 4) モデル S6 ; 対称 6 層積層板  $[0/90^\circ/0]_2$

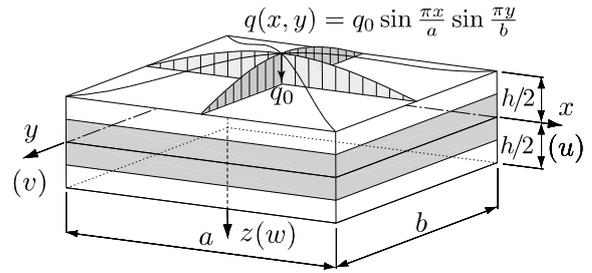


図-2 計算モデル (異方性積層板)

- 5) モデル AS6 ; 逆対称 6 層積層板  $[0/90^\circ]_3$
  - 6) モデル S12 ; 対称 12 層積層板  $[0/90^\circ]_{3S}$
  - 7) モデル AS12 ; 逆対称 12 層積層板  $[0/90^\circ]_6$
- 各層の厚さは、全て同じとし、材料定数には次の値を用いる。

$$\begin{aligned}
 E_1/E_2 &= 25, & E_3 &= E_2, & G_{12} &= G_{13} = 0.5E_2 \\
 G_{23} &= 0.2E_2, & \nu_{12} &= \nu_{13} = \nu_{23} = 0.25
 \end{aligned}$$

荷重は、図-2 に示すように板上縁に正弦荷重を満載する。変位と応力は図-3 の図中に示す評価点で評価し、次式を用いて無次元化して表す。

$$\left. \begin{aligned}
 \tilde{u} &= \frac{uE_2h^3}{q_0b^4}, & \tilde{v} &= \frac{vE_2h^3}{q_0b^4}, & \tilde{w} &= \frac{wE_2h^3}{q_0b^4} \\
 \tilde{\sigma}_x &= \frac{\sigma_xh^2}{q_0b^2}, & \tilde{\sigma}_y &= \frac{\sigma_yh^2}{q_0b^2}, & \tilde{\sigma}_z &= \frac{\sigma_z}{q_0} \\
 \tilde{\tau}_{xy} &= \frac{\tau_{xy}h^2}{q_0b^2}, & \tilde{\tau}_{yz} &= \frac{\tau_{yz}h}{q_0b}, & \tilde{\tau}_{xz} &= \frac{\tau_{xz}h}{q_0b}
 \end{aligned} \right\} (7)$$

3.2 精度と収束性

表-1 にモデル S4 (対称 4 層積層板)、表-2 にモデル AS4 (逆対称 4 層積層板) における変位の 3 成分と応力の 5 成分の厳密解<sup>3)</sup>に対する誤差 (%) と、未知自由度

表-1 対称4層積層板 $[0/90^\circ]_S$ の変位と応力の誤差 ( $h/b=3/10$ ) (%)

$N_R$	$p$	$u$	$v$	$w$	$\sigma_x$	$\sigma_y$	$\tau_{xy}$	$\tau_{yz}^*$	$\tau_{xz}^*$	DOF
1	0	-53.71	-39.88	-22.61	-52.65	-17.96	-43.82	-3.88	30.98	6
	1	-17.16	-9.48	-3.88	-16.21	-12.29	-11.66	6.59	-1.31	9
	2	-11.24	-6.70	-3.60	-10.33	-10.91	-7.99	6.51	-1.41	12
	3	-1.51	-2.11	-1.09	-0.94	-4.52	-1.94	4.27	-1.53	15
	4	-1.39	-1.58	-0.95	-1.35	-4.89	-1.52	4.34	-1.32	18
	5	-0.12	-0.15	-0.18	-0.17	-1.17	-0.14	0.36	-0.19	21
2	0	-49.64	-39.53	-21.86	-48.26	-17.66	-42.41	-3.99	31.65	9
	1	-11.77	-6.73	-3.59	-11.03	-11.50	-8.16	6.76	-1.07	15
	2	-3.22	-1.15	-0.81	-2.62	-1.34	-1.74	-0.84	-0.82	21
	3	-0.49	-0.54	-0.33	-0.45	-1.10	-0.53	-0.39	-0.52	27
	4	-0.07	-0.24	-0.12	-0.06	-0.49	-0.19	-0.02	-0.21	33
	5	-0.02	-0.10	-0.05	0.01	-0.20	-0.08	0.01	-0.08	39
LW	1	-11.77	-6.73	-3.59	-11.03	-11.50	-8.16	-22.19 †	-2.43 †	15
	2	-1.11	-0.68	-0.44	-0.95	-0.93	-0.80	13.09 †	-0.15 †	27
	3	-0.01	-0.005	-0.003	0.03	0.02	-0.01	-1.42 †	-0.04 †	39
厳密解 <sup>3)</sup>		2.923817 ( $\tilde{u} \times 1000$ )	7.339311 ( $\tilde{v} \times 1000$ )	2.731683 ( $\tilde{w} \times 100$ )	-8.148298 ( $\tilde{\sigma}_x \times 10$ )	-7.150071 ( $\tilde{\sigma}_y \times 10$ )	5.373761 ( $\tilde{\tau}_{xy} \times 100$ )	3.022959 ( $\tilde{\tau}_{yz} \times 10$ )	2.005407 ( $\tilde{\tau}_{xz} \times 10$ )	—
評価点		D, $z=-h/2$	C, $z=-h/2$	A, $z=-h/2$	A, $z=-h/2$	A, 2層目上	B, $z=-h/2$	C, $z=0$	D, $z=0$	—

† Layer-wise 理論の面外せん断応力は層境界の平均値を用いている。

表-2 逆対称4層積層板 $[0/90^\circ]_2$ の変位と応力の誤差 ( $h/b=3/10$ ) (%)

$N_R$	$p$	$u$	$v$	$w$	$\sigma_x$	$\sigma_y$	$\tau_{xy}$	$\tau_{yz}^*$	$\tau_{xz}^*$	DOF
1	0	-41.92	-62.15	-28.59	-42.18	-33.49	-56.16	25.48	24.84	6
	1	-16.10	-21.17	-4.24	-15.63	-4.48	-19.67	1.19	1.04	9
	2	-14.23	-14.58	-3.97	-13.48	-1.09	-14.48	0.75	1.25	12
	3	-3.62	0.97	-0.94	-2.89	-7.68	-0.39	-0.60	-0.20	15
	4	-0.49	0.89	-0.43	-0.48	-4.42	0.48	-0.63	-0.36	18
	5	-0.32	0.45	-0.40	-0.32	-4.60	0.22	-0.32	-0.26	21
2	0	-52.62	-38.21	-23.24	-51.13	-14.17	-42.48	18.98	22.96	9
	1	-11.38	-5.65	-2.91	-10.69	-10.19	-7.35	0.56	0.89	15
	2	-3.377	-1.20	-0.88	-2.81	-0.90	-1.84	-1.24	-0.99	21
	3	-0.49	-0.55	-0.33	-0.43	-1.23	-0.53	-0.49	-0.49	27
	4	-0.05	-0.23	-0.10	-0.05	-0.53	-0.18	-0.14	-0.14	33
	5	-0.01	-0.09	-0.04	0.02	-0.22	-0.07	-0.05	-0.05	39
LW	1	-11.38	-5.65	-2.91	-10.69	-10.19	-7.35	-5.17 †	-7.60 †	15
	2	-1.15	-0.73	-0.48	-0.98	-1.05	-0.86	11.84 †	10.59 †	27
	3	-0.01	-0.004	-0.002	0.03	0.02	-0.01	-0.57 †	-0.54 †	39
厳密解 <sup>3)</sup>		3.053017 ( $\tilde{u} \times 1000$ )	7.251844 ( $\tilde{v} \times 1000$ )	2.780261 ( $\tilde{w} \times 100$ )	-8.485094 ( $\tilde{\sigma}_x \times 10$ )	-6.582170 ( $\tilde{\sigma}_y \times 10$ )	5.395613 ( $\tilde{\tau}_{xy} \times 100$ )	2.173244 ( $\tilde{\tau}_{yz} \times 10$ )	2.300846 ( $\tilde{\tau}_{xz} \times 10$ )	—
評価点		D, $z=-h/2$	C, $z=-h/2$	A, $z=-h/2$	A, $z=-h/2$	A, 2層目上	B, $z=-h/2$	C, $z=0$	D, $z=0$	—

† Layer-wise 理論の面外せん断応力は層境界の平均値を用いている。

数 (DOF) を示している。領域数は  $N_R=1, 2$  の場合を計算し、式(2)の展開次数は各変位成分で同じ  $p_u^r=p_v^r=p_w^r=p$  として  $p=0\sim 5$  まで採っている。また、比較のために  $p$  次補間する Layer-wise 理論 (LW) の解<sup>4)</sup>も示している。

表-1 の対称4層積層板では、領域数  $N_R=1$  のときでも解の収束性は良好である。 $p=0$  では誤差が大きくなっているが、 $p=1$  として ZIG-ZAG 項を加えると精度が大きく改善され、 $p=5$  (21DOF) まで次数を増加させると、 $\sigma_y$  では 1%程度、その他の変位と応力では 1%以下の誤差となっている。 $N_R=2$  のときには収束性がさら

に改善され、 $p=3$  (27DOF) まで次数を増加させることで誤差 1%程度の解を計算できる。一方、Layer-wise 理論では、次数  $p=2$  では面外せん断応力の誤差が大きく、誤差を 1%程度とするためには  $p=3$  を用いる必要がある。Region-wise ZIG-ZAG 理論 ( $N_R=1, p=5, 21DOF$ ) では、Layer-wise 理論 ( $p=3, 39DOF$ ) の 54%程度の未知自由度数で誤差 1%程度の解を計算することができている。

積層順序を変えた表-2 の逆対称4層積層板においては、 $N_R=1$  のときには  $p=4$  (18DOF) を用いれば、 $\sigma_y$  を除く変位と応力の誤差は 1%以下となっている。 $N_R=2$  の

ときには  $p=3$  (27DOF) を用いることで誤差 1% 程度の解を計算できる. 一方, Layer-wise 理論では, 誤差を 1%程度とするためには  $p=3$  (DOF=39) を用いる必要があり, Region-wise ZIG-ZAG 理論 ( $N_R=1, p=4, 18DOF$ ) では, Layer-wise 理論 ( $p=3, 39DOF$ ) の 46%程度の未知自由度で誤差 1%程度の解を計算することができる.

### 3.3 Layer-wise 理論との計算効率の比較

ここでは, 変位と応力の厳密解に対する誤差を 1%程度とするための未知自由度数を Layer-wise 理論と比較し, Region-wise ZIG-ZAG 理論の計算効率について考察する.

図-3 は, 7つの計算モデルについて, 変位の 3成分と応力の 5成分の厳密解に対する誤差を 1%程度とするための未知自由度数を Layer-wise 理論と比較したもので, 横軸には各計算モデルを, 縦軸には未知自由度数 (DOF) を示している. 変位と応力の評価点については, 表-1.2 の下段に示しており, 各成分の最大値の厳密解に対する誤差を評価している. 線種は○印の実線が Region-wise ZIG-ZAG 理論  $N_R=1$ , 破線が  $N_R=2$ , 点線が  $N_R=3$  の結果であり, △印の実線が Layer-wise 理論の結果を表している.

図より, Layer-wise 理論 (△印の実線) では, 層数が増えると誤差を 1%程度とするための未知自由度数が大きく増加している (ただし, モデル AS12 (逆対称 12層) では低下している).

一方, Region-wise ZIG-ZAG 理論では, 領域数  $N_R=1$  (実線) では, 3層 (S3) から 12層 (AS12) まで誤差を 1%程度とするための未知自由度数はほぼ一定で約 20DOF 程度となっている. 領域数  $N_R=2$  (破線) でも, どの層数においても未知自由度数は約 27DOF 程度とほぼ一定で, 領域数  $N_R=3$  (点線) では S6 (対称 6層) で少し大きくなっているが約 30DOF 程度となっている.

このことから, Region-wise ZIG-ZAG 理論では領域数を少なくした方が未知自由度数が少なくなって, 計算効率が良いと言える.

また, Region-wise ZIG-ZAG 理論と Layer-wise 理論の誤差を 1%程度とするための未知自由度数を比較すると, Region-wise ZIG-ZAG 理論の領域数  $N_R=1$  では, 3層では Layer-wise 理論に対して 70%程度, 4層では 50%程度, 6層では 32%程度, 12層では 14%程度の未知自由度数で誤差 1%程度の解を計算することができる (12層では S12 の未知自由度数を用いている).

以上のことから, Layer-wise 理論と比較して, 誤差を 1%程度とするための未知自由度数は層数が多くなるほど少なくなり, Region-wise ZIG-ZAG 理論では, Layer-wise 理論より効率的に高精度の解を計算できる.

## 4. まとめ

Region-wise ZIG-ZAG 理論による直交積層板の曲げ解析を級数解法により定式化し, 7 ケース (3層~12層) の異方性積層板の数値計算例を用いて精度を調べ, 厳密解に対する誤差を 1%程度とするための未知自由度数を Layer-wise 理論と比較した.

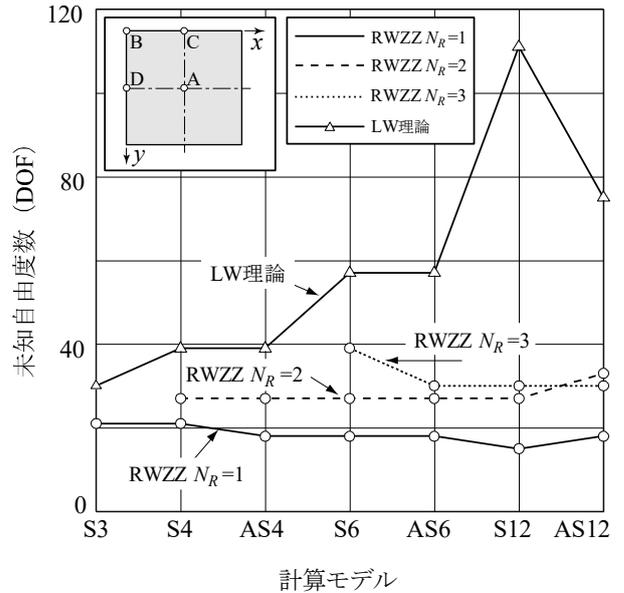


図-3 異方性積層板 ( $h/b=0.3$ )

どの計算モデルにおいても Region-wise ZIG-ZAG 理論では, 領域の採り方に依らず展開次数を高めることで精度の良い変位と応力を計算できる. また, 領域数を増やすと変位と応力の収束性が改善されるが, 領域数を少なくした方が未知自由度数が少なくなって, 効率的に計算できる.

さらに, Region-wise ZIG-ZAG 理論では, Layer-wise 理論と比較して, 誤差 1%程度とするための未知自由度数は層数が多くなるほど少なくなる. Region-wise ZIG-ZAG 理論では, Layer-wise 理論に比べて効率的に高精度な解を計算することができる.

謝辞: 本研究は JSPS 科研費 JP19K04586 の補助を受けた. ここに, 記して感謝の意を表する.

## 参考文献

- 1) 渡辺 力: 効果的な ZIG-ZAG 関数の開発と異方性積層板ならびに等方性平板の厚板解析への適用, 土木学会論文集 A2 (応用力学), Vol.74, No.1, pp.75-91, 2018.
- 2) 渡辺 力: 複合材料ならびに等方性材料からなる積層構造のための Region-wise ZIG-ZAG 理論の開発, 土木学会論文集 A2 (応用力学), Vol.76, No.1, pp.58-74, 2020.
- 3) Pagano, N.J.: Exact solutions for rectangular bidirectional composites and sandwich plates, *J. Compos. Mater.*, Vol.4, pp.20-34, 1970
- 4) 渡辺 力, 佐野凌希: Layer-wise 理論ならびに改良 ZIG-ZAG 理論による異方性積層板の曲げ解析, 土木学会北海道支部論文報告集, 第 76 号, A-42, 2020.