

Sharp Interface モデルを用いた 二層流流れの数値シミュレーション

Numerical Simulation of Two-Layer Flow Using Sharp Interface Model

北海道大学工学部環境社会工学科 ○学生員 土屋裕嵩 (Hiroataka Tsuchiya)
北海道大学大学院教授工学研究院 正会員 渡部靖憲 (Yasunori Watanabe)

1. はじめに

浅水域では塩水逆上や密度成層など、流体の密度差に起因して躍層上の内部波の発生や混合による躍層の崩壊を通して、海中の熱や物質の交換が行われている。これらの物理過程は、躍層における流体の不安定性の増幅に依存して決定されるため、海中の複雑な物質輸送過程を説明するためには異なるメカニズムに起因する流体の不安定性を理解する必要がある。一方渡部・土屋(2020)は、気液界面における力学的境界条件を満足するように気液流速を相外に外挿し気液二相計算を行う Sharp Interface モデルを提案している。このモデルの気相では重力の影響を無視していたが、この効果を導入することで、比較的小さい密度比をもつ交わらない液体の二層流計算へ拡張可能である。

本研究は、渡部・土屋(2020)のモデルの枠組みの中で密度比の効果を導入し、Rayleigh-Taylor 不安定¹⁾および Kelvin-Helmholtz 不安定²⁾が混在する流れ場に対する内部波および躍層の不安定化に着目しその特徴を調査するものである。

2. 流れの不安定性

ある界面($z=0$)に発生する波、あるいは水面振動について考える。上層($z>0$)では密度 ρ_1 の流体が水平方向に流速 u_1 で流れ、下層($z<0$)では密度 ρ_2 の流体が水平方向に流速 u_2 で流れているとき、一様流に微小変動が加わった時の流れ場は次式のような速度ポテンシャルで記述される。

$$\phi = \begin{cases} u_1 x + \phi_1(x, z, t) & (z > 0) \\ u_2 x + \phi_2(x, z, t) & (z < 0) \end{cases} \quad (1)$$

界面($z=\eta(x, t)$)における運動学的境界条件は、微小項を無視すると次式で与えられる。

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial z} - \frac{\partial \eta}{\partial t} - u_1 \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial z} - \frac{\partial \eta}{\partial t} - u_2 \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0 \quad (3)$$

また、界面において両相の圧力と表面張力は釣り合っているので力学的境界条件は次式のように表される。

$$\begin{aligned} & \rho_1 \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial x} + g\eta \right) \\ &= \rho_2 \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial t} + u_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial x} + g\eta \right) - \gamma \kappa \end{aligned} \quad (4)$$

ここで、 γ は表面張力係数、 κ は界面の曲率である。また、両相はともに非常に薄い層であり、深水条件を満た

すとし、 η, ϕ_1, ϕ_2 は次のような関数形を持つと仮定する。

$$(\eta, \phi_1, \phi_2) = (\tilde{\eta}, \tilde{\phi}_1(z), \tilde{\phi}_2(z)) e^{st+ikx} \quad (5)$$

(1)式はラプラス方程式より、以下のようなヘルムホルツ方程式となる。

$$\frac{\partial^2 \tilde{\phi}_1}{\partial z^2} - k^2 \tilde{\phi}_1 = 0 \quad (6)$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{\phi}_2}{\partial z^2} - k^2 \tilde{\phi}_2 = 0 \quad (7)$$

運動学的境界条件および深水条件から、これらの微分方程式の解は、次式のようになる。

$$\tilde{\phi}_1 = -\frac{s+iku_1}{k} \tilde{\eta} e^{-kz} \quad (8)$$

$$\tilde{\phi}_2 = -\frac{s+iku_2}{k} \tilde{\eta} e^{kz} \quad (9)$$

また、力学的境界条件より、次のような分散関係式が得られる。

$$\begin{aligned} s = & -ik \frac{\rho_1 u_1 + \rho_2 u_2}{\rho_1 + \rho_2} \\ & \pm \left(\frac{k^2 \rho_1 \rho_2 (u_1 - u_2)^2}{(\rho_1 + \rho_2)^2} + \frac{gk(\rho_1 - \rho_2) - \gamma k^3}{\rho_1 + \rho_2} \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (10)$$

ここで、上層の流体の密度が有限で、表面張力 γ が無視できるとすると、

$$s^2 = k \rho_1 \rho_2 (u_1 - u_2)^2 + g(\rho_1^2 - \rho_2^2) > 0 \quad (11)$$

が成り立つとき、 s は実数となるので界面波の振幅は増幅し流れは不安定となる。 $u_1 \neq u_2$ であれば、 k が十分大きくなると(11)式が成り立つので流れが不安定となる。このように両相に境界面で速度差があるときに生じる不安定を Kelvin-Helmholtz 不安定という。また、上層の流体の密度が下層の流体の密度より大きい($\rho_1 > \rho_2$)場合、常に(11)式が成り立つので流れが不安定となり、この時の不安定を Rayleigh-Taylor 不安定という。

3. 数値計算法

(1) 支配方程式

渡部・土屋(2020)のモデルと同様に、フィルター操作されたナビエ・ストークス方程式を支配方程式とし、3次元 Large Eddy Simulation を行う。

$$\frac{Du^l}{Dt} = -\nabla \frac{p^l}{\rho^l} + \nu^l \nabla^2 u^l - \nabla \cdot \tau^l - g \quad (12)$$

$$\frac{Du^g}{Dt} = -\nabla \frac{p^g}{\rho^g} + \nu^g \nabla^2 u^g - \nabla \cdot \tau^g - g \quad (13)$$

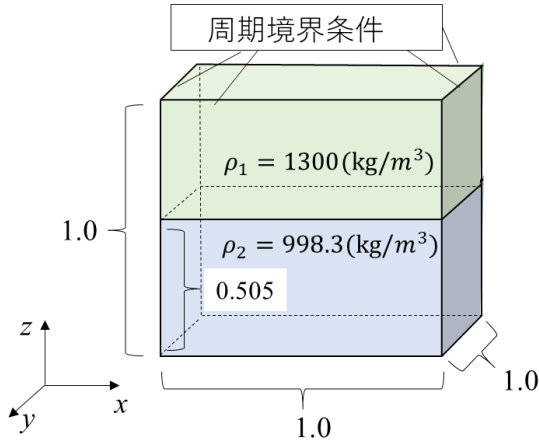


図 1. Rayleigh-Taylor 不安定を模擬する計算条件 (Case1)

ここで、 u^l は下層の流速、 p^l は下層の圧力、 ν^l は下層の動粘性係数、 ρ^l は下層の密度、 τ^l は下層のサブグリッド応力、 g は重力加速度、 u^g は上層の流速、 p^g は上層の圧力、 ν^g は上層の動粘性係数、 ρ^g は上層の密度、 τ^g は上層のサブグリッド応力である。

(2) 境界条件

境界面では、両相の接線方向せん断力が等しくなるというはずであり、この境界条件は次式で表される。

$$\mu^l \left(\frac{\partial u_n^l}{\partial l} \Big|_s + \frac{\partial u_l^l}{\partial n} \Big|_s \right) = \mu^g \left(\frac{\partial u_n^g}{\partial l} \Big|_s + \frac{\partial u_l^g}{\partial n} \Big|_s \right) \quad (14)$$

$$\mu^l \left(\frac{\partial u_n^l}{\partial m} \Big|_s + \frac{\partial u_m^l}{\partial n} \Big|_s \right) = \mu^g \left(\frac{\partial u_n^g}{\partial m} \Big|_s + \frac{\partial u_m^g}{\partial n} \Big|_s \right) \quad (15)$$

ここで、 n は境界面に対する法線方向、 l, m は境界面に対する接線方向を表しており、 u_n, u_l, u_m はそれぞれ n, l, m 方向の速度を表している。

(3) 速度の外挿計算

グリッド上の速度は、それぞれの位置で隣り合うグリッドの速度を用い、離散的に導出される。しかし別の相と隣り合う境界面近傍のグリッドの速度を求める場合には相外の流速を用いなければならず、境界面での気液の速度差に影響を受け、計算結果が実際の速度の値と異なる値を与えてしまう。このため、速度を求めたい点の相の速度を、接線方向せん断力のバランス条件(14)、(15)を用いて物理的に矛盾なく別の相に外挿する必要がある。

はじめに、任意のグリッド上で流速勾配は、次式のように境界面上の流速勾配と未定乗数 $a_{ij}^l, b_{ij}^l, c_{ij}^l$ に対する一次結合で表せると仮定する。

$$\frac{\partial u_i^l}{\partial x_j} = \frac{\partial u_i^l}{\partial x_j} \Big|_s + a_{ij}^l x^l + b_{ij}^l y^l + c_{ij}^l z^l \quad (16)$$

ここで、 $i, j = 1, 2, 3$ である。

(16)式は、(14)式を用い整理することにより次式が得られる。

$$\begin{aligned} & \sum \{ \mu^l (a_{ij}^l x^l + b_{ij}^l y^l + c_{ij}^l z^l) \\ & - \mu^g (a_{ij}^g x^g + b_{ij}^g y^g + c_{ij}^g z^g) \} (l_j n_i + l_i n_j) \\ & = \sum \left(\mu^l \frac{\partial u_i^l}{\partial x_j} - \mu^g \frac{\partial u_i^g}{\partial x_j} \right) (l_j n_i + l_i n_j) \end{aligned} \quad (17)$$

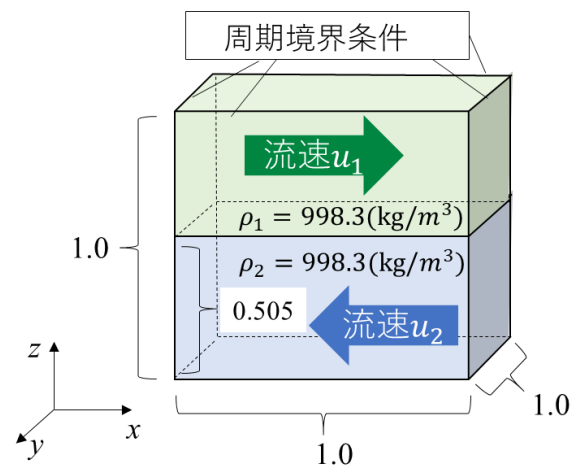


図 2. Kelvin-Helmholtz 不安定を模擬する計算条件 (Case2)

(17)式を解き未知数 $a_{ij}^l, b_{ij}^l, c_{ij}^l$ を求め、(16)式に代入することにより境界面上の流速勾配を求めることができ、その値を次式に代入することによって、相内の流速を相外に外挿することができる。

$$u_i^l = u_i^l \Big|_s + \frac{\partial u_i^l}{\partial x_j} \Big|_s x_j^l \quad (18)$$

これらの計算によって両相の流速の外挿計算を行い、界面近傍の流速を二次精度で近似し求めることができる。

4. 計算条件

本稿では、Rayleigh-Taylor 不安定および Kelvin-Helmholtz 不安定を模擬するために二つのケースで計算を行った。

(1) Rayleigh-Taylor 不安定 (Case1)

計算は無次元長さ $1.0 \times 1.0 \times 1.0$ の矩形領域において行われた。すべての側面に周期境界条件を与え、底面境界には non-slip 条件、天井境界には不透過 slip 条件を与えた。計算グリッドの数は、 (x, y, z) 方向に $(50, 50, 50)$ 、グリッド幅は実次元長さで 5mm であった。Rayleigh-Taylor 不安定は先述した通り、ある二層流の上層の流体の密度が下層の流体の密度より大きい場合に界面に生じる不安定である。これを再現するため、上層の流体の密度 $\rho_1 = 1300 (\text{kg/m}^3)$ 、下層の流体の密度 $\rho_2 = 998.3 (\text{kg/m}^3)$ とした。(図1)

(2) Kelvin-Helmholtz 不安定 (Case2)

Kelvin-Helmholtz 不安定を模擬する計算においても計算領域、各境界条件については Rayleigh-Taylor 不安定を模擬する場合と同じ条件で計算を行った。Kelvin-Helmholtz 不安定を再現するため、上層と下層の密度を同値 ($\rho_1 = \rho_2 = 998.3$) とし、また上層の初期流速を $u_1 = 2.0$ 、 x 軸方向の一定の静圧力勾配を $\partial P / \partial x = -4.0$ 、下層の初期流速を $u_2 = -2.0$ 、 x 軸方向の一定の静圧力勾配を $\partial P / \partial x = 4.0$ として計算を行った。(図2)

5. 計算結果

(1) Rayleigh-Taylor 不安定

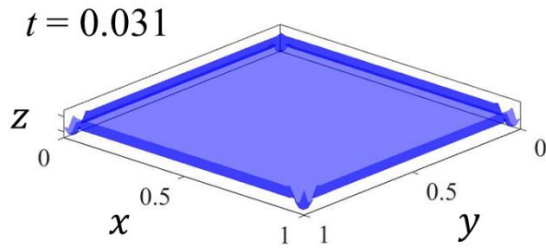


図 3. Case1 での境界面形状

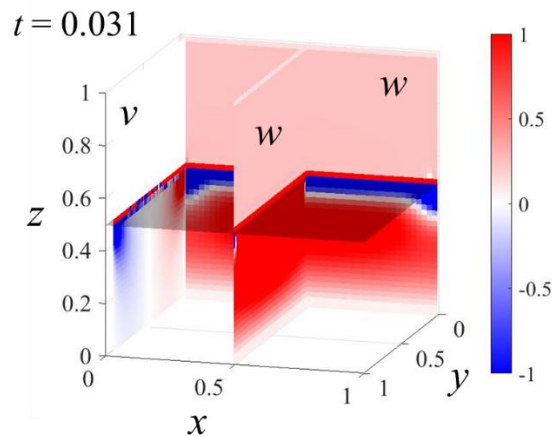


図 4. Case1 での流速分布

Rayleigh-Taylor 不安定を模擬する計算でのタイムステップ $t = 0.031$ において、境界面の形状は図 3 のようになった。今回の計算では Rayleigh-Taylor 不安定は再現できず、側面の境界付近で界面形状の変化が見られる結果となった。この時の流速分布を図 4 に示す。 $x = 0$ の面に y 方向の流速 v 。 $x = 0.5, y = 0$ の面に z 方向の流速 w を描画している。 w は x, y 方向にほぼ勾配がなく、連続式が満たせていないことがわかる。これらの結果から、今後周期境界条件や流速計算を見直す必要があるということがわかった。

(2) Kelvin-Helmholtz 不安定

Kelvin-Helmholtz 不安定を模擬する計算でのタイムステップ $t = 0.043$ において、境界面の形状は図 5 のようになった。Rayleigh-Taylor 不安定は再現できず、 $0.75 < y <$

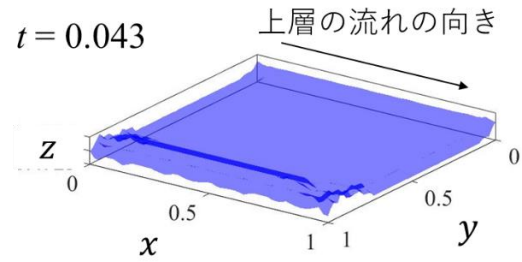
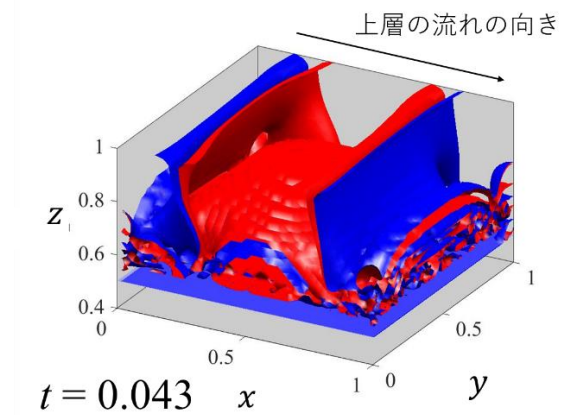


図 5. Case2 での境界面形状


 図 6. Case2 での y 方向渦度の等値面

1.0 の範囲で界面形状の変化が見られる結果となった。次に、この時の上層での y 方向渦度の等値面を図 6 に示す。この図から、上層での流れの方向に周期的な渦が発生していることがわかり、流れ方向に周期的に現れる Kelvin-Helmholtz 不安定が今後のタイムステップで生じる可能性があると考えられる。

6. 結論

今回の計算では Rayleigh-Taylor 不安定、Kelvin-Helmholtz 不安定ともに再現することはできなかったが、Case2 においては流れ方向に周期的に y 方向渦が発生していたことから、今後のタイムステップで Kelvin-Helmholtz 不安定の発生が期待できる。今後さらなるパラメータスタディを経て数値計算の精度を高めていく必要がある。

参考文献

- 1) D.H.Sharp : An overview of Rayleigh-Taylor instability. Physica D: Nonlinear Phenomena, Volume 12, Issues 1-3, 1984, Pages 3-18
- 2) P.G.Drazin : DYNAMICAL METEOROLOGY | Kelvin-Helmholtz Instability. Academic Press, 2015, Pages 343-346