

Region-wise ZIG-ZAG 理論における面外応力の改良

Improvement of out-of-plane stresses in region-wise ZIG-ZAG theory

函館工業高等専門学校 正員 渡辺 力 (Chikara WATANABE)
 函館工業高等専門学校 学生会員 工藤匡司 (Takashi KUDO)
 函館工業高等専門学校 学生会員 萬壽英敏 (Hidetoshi BANJYU)
 函館工業高等専門学校 学生会員 齊藤翔太 (Shyota SAITOH)

1. まえがき

複合材料で補強された鋼やコンクリート構造に ZIG-ZAG 理論を適用するために、改良 ZIG-ZAG 理論¹⁾と Layer-wise 理論を融合させた Region-wise ZIG-ZAG 理論の開発を進めている²⁾。この理論では、積層構造を板厚方向に幾つかの領域に分け、その領域境界と領域内部に自由度を持たせる。領域内部の ZIG-ZAG 変位を効率的に表すために、高次の改良 ZIG-ZAG 理論を用いている。これにより、剥離解析での剥離変位の導入や、複合材料と等方性材料からなるサンドイッチ構造へ適用が容易となり、解析に必要な未知自由度数は Layer-wise 理論に比べてかなり少なくなる。

この理論は変位法に基づく理論であるので、ZIG-ZAG 分布を仮定する変位場により領域境界や層境界での変位の連続性は満足される。しかしながら、構成方程式から計算される面外応力については、領域境界や領域内部の層境界での連続性と、板の上下縁での境界条件を満足しない。そこで、三次元弾性理論の応力の平衡方程式から計算した改良面外応力により精度の改善が図られている²⁾。

本報告では、この Region-wise ZIG-ZAG 理論を、周辺単純支持された逆対称 4 層積層板の曲げ解析に用いて、中等厚、厚板領域での厳密解に対する精度を調べ、三次元弾性理論の応力の平衡方程式から計算した改良面外応力の効果を調べた結果について報告する。

2. Region-wise ZIG-ZAG 理論

板厚 h の異方性積層板あるいはサンドイッチ板を、図-1 に示すように板厚方向に対して N_R 個の領域に分ける。領域の分け方は、層数など自由に採ることができるが、複合材料と等方性材料からなる構造では材料の異なる領域で分ける。また、剥離解析に用いるときには、剥離変位を考慮する位置に領域境界を設ける。領域 r の領域境界の z 座標値を z_r, z_{r+1} とし、領域内の層数を N_r 、領域の厚さを h_r 、第 k 層目の厚さを $h^{r(k)}$ と表す。

2.1 変位場

Region-wise ZIG-ZAG 理論では、領域 r 第 k 層の変位を次式で与える。

$$\left. \begin{aligned} u^{r(k)} &= f_0^r u_r + f_1^r u_{r+1} + \sum_{s=1}^{p_u^r} \phi_{us}^{r(k)} u_s^r \\ v^{r(k)} &= f_0^r v_r + f_1^r v_{r+1} + \sum_{s=1}^{p_v^r} \phi_{vs}^{r(k)} v_s^r \\ w^{r(k)} &= f_0^r w_r + f_1^r w_{r+1} + \sum_{s=1}^{p_w^r} \phi_{ws}^{r(k)} w_s^r \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

ここに、式 (1) の右辺第 1 項と第 2 項が領域境界変位の項で、第 3 項が領域内部変位の項である。 u_r, u_{r+1} などは図-1 に示す領域 r の境界変位で、 u_s^r, v_s^r, w_s^r は領域 r の内部変位を表す。 s は板厚方向 (ζ^r 方向) の補間関数 (多項式) の次数を表し、 p_u^r, p_v^r, p_w^r は各変位成分の領域 r での展開次数を表す。

領域内部変位の項 (式 (1) の右辺第 3 項) において、 $s=1$ の場合が ZIG-ZAG 項で、 $\phi_{u1}^{r(k)}, \phi_{v1}^{r(k)}, \phi_{w1}^{r(k)}$ が領域 ZIG-ZAG 関数、 u_1^r, v_1^r, w_1^r が領域 ZIG-ZAG 変位である。また、 $s \geq 2$ の場合が領域高次変位の項で、 u_s^r, v_s^r, w_s^r ($s \geq 2$) は領域内部変位の高次項である。

2.2 面外応力の改良

(1) 応力成分

領域 r 第 k 層の応力成分は、三次元弾性理論の構成方程式より、直交積層板に対して次式で与えられる。

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}^{r(k)} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{13} & 0 \\ & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{23} & 0 \\ & & \bar{Q}_{33} & 0 \\ sym. & & & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}^{r(k)} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}^{r(k)} \quad (2)$$

$$\begin{Bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix}^{r(k)} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{44} & 0 \\ 0 & \bar{Q}_{55} \end{bmatrix}^{r(k)} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix}^{r(k)} \quad (3)$$

(2) 改良面外応力

式 (2), (3) の構成方程式から計算した面外応力 $\tau_{xz}^{r(k)}, \tau_{yz}^{r(k)}, \sigma_z^{r(k)}$ は、領域境界や領域内の層境界での連続性、板の上下端での境界条件を満足しない。そこで、面外

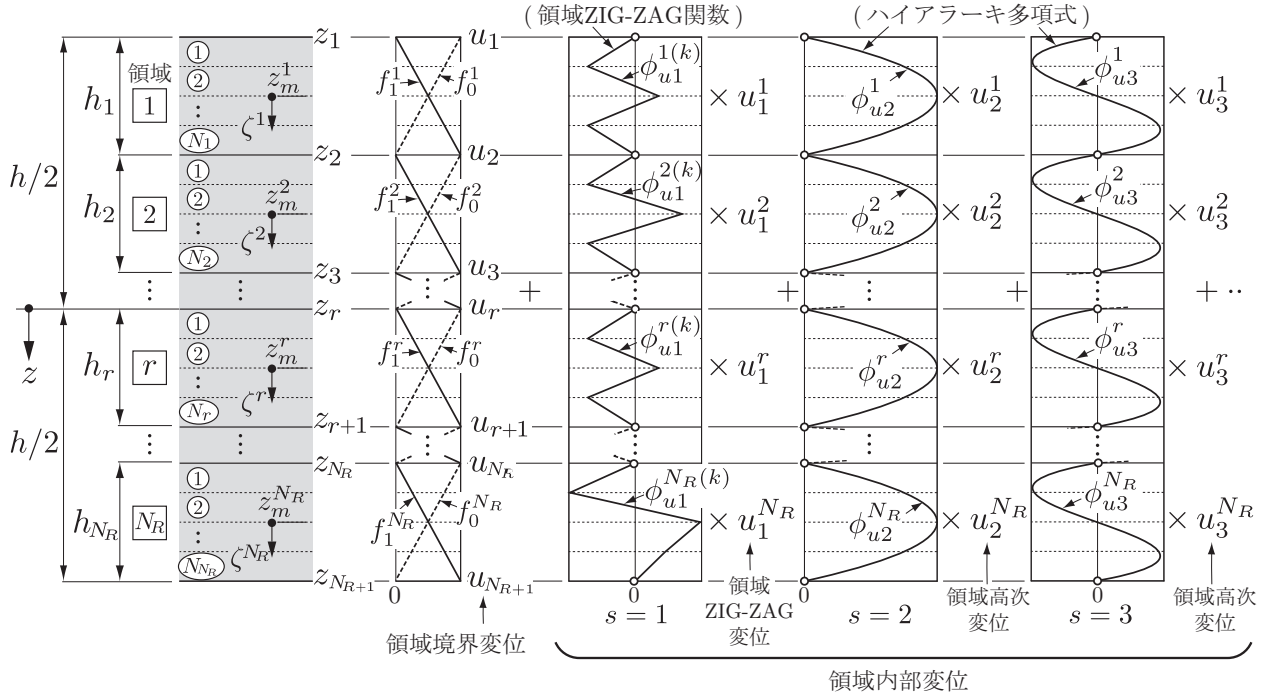


図-1 Region-wise ZIG-ZAG 理論における自由度の採り方と補間関数

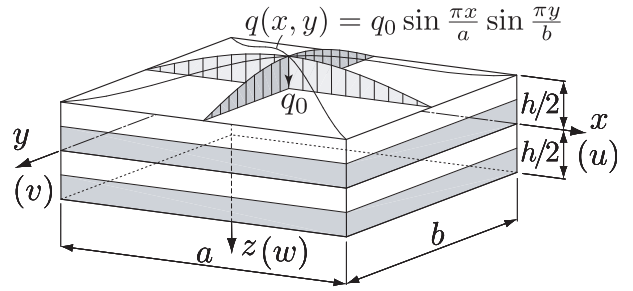
応力を三次元弾性理論の応力の平衡方程式から計算することにより精度の改善を図る^{1),2)}。三次元弾性理論の応力の平衡方程式より、次式が成り立つ。

$$\begin{aligned}
 \tau_{xz}^{r(k)} &= - \int \left(\sigma_{x,x}^{r(k)} + \tau_{xy,y}^{r(k)} \right) dz \\
 \tau_{yz}^{r(k)} &= - \int \left(\sigma_{y,y}^{r(k)} + \tau_{xy,x}^{r(k)} \right) dz \\
 \sigma_z^{r(k)} &= - \int \left(\tau_{xz,x}^{r(k)} + \tau_{yz,y}^{r(k)} \right) dz
 \end{aligned} \quad (4)$$

式(4)に式(2), (3)の応力とひずみ成分を用いて変位で表し、積分を実施して領域 r 第 k 層の座標 z における面外応力を求める。領域 r 内での層境界における連続条件を考慮して、次の改良面外応力 $\tau_{xz}^{r(k)*}, \tau_{yz}^{r(k)*}, \sigma_z^{r(k)*}$ が得られる。

$$\begin{aligned}
 \tau_{xz}^{r(k)*}(z) &= \tau_{xz}^{r(k)}(z) \\
 &+ \sum_{i=1}^k \left(\tau_{xz}^{r(i-1)}(z_i^r) - \tau_{xz}^{r(i)}(z_i^r) \right) + \tau_{xz}^{rt} \\
 \tau_{yz}^{r(k)*}(z) &= \tau_{yz}^{r(k)}(z) \\
 &+ \sum_{i=1}^k \left(\tau_{yz}^{r(i-1)}(z_i^r) - \tau_{yz}^{r(i)}(z_i^r) \right) + \tau_{yz}^{rt} \\
 \sigma_z^{r(k)*}(z) &= \sigma_z^{r(k)}(z) \\
 &+ \sum_{i=1}^k \left(\sigma_z^{r(i-1)}(z_i^r) - \sigma_z^{r(i)}(z_i^r) \right) + \sigma_z^{rt}
 \end{aligned} \quad (5)$$

この式(5)により、面外応力の境界条件、領域境界と領域内の層境界での面外応力の連続性を満足する面外応力の3成分が得られる。


 図-2 逆対称4層積層板 ($h/b=3/10$)

3. 数値計算例

3.1 計算モデル

計算モデルは、図-2に示す長さ a 、幅 b 、板厚 h 、繊維配向を $[0/90^\circ/0/90^\circ]$ とした周辺単純支持された逆対称4層積層板である。形状比を $a/b=1$ 、板厚比を $h/b=1/10$ および $3/10$ とする。また、各層の厚さは全て同じとし、材料定数には次の値を用いる。

$$E_1/E_2 = 25, \quad E_3 = E_2, \quad G_{12} = G_{13} = 0.5E_2$$

$$G_{23} = 0.2E_2, \quad \nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{23} = 0.25$$

荷重は、図-2に示すように板上縁に正弦荷重($q=q_0 \sin(\frac{\pi x}{a}) \sin(\frac{\pi y}{b})$)を作用させ、厳密解³⁾に対する変位と応力の精度を調べる。

3.2 精度検証

表-1に板厚比 $h/b=1/10$ 、表-2に $h/b=3/10$ における変位の3成分と応力の5成分の厳密解³⁾に対する誤差(%)を示している。図-1に示す領域数 N_R を $N_R=1, N_R=2$ とした場合について計算しており、式

表-1 逆対称4層積層板 $[0/90^\circ/0/90^\circ]$ の変位と応力の誤差 ($h/b = 1/10$) (%)

N_R	p	u	v	w	σ_x	σ_y	τ_{xy}	τ_{yz}^*	τ_{xz}^*	DOF
1	0	-9.24	-18.99	-15.18	-8.80	-7.45	-15.52	3.11	3.04	6
	1	-2.11	-5.52	-2.04	-1.92	-0.80	-4.31	0.22	0.19	9
	2	-2.81	-4.00	-1.90	-2.75	-0.43	-3.57	0.26	0.27	12
	3	-0.62	-0.07	-0.48	-0.51	-1.56	-0.27	0.09	0.10	15
	4	0.02	0.01	-0.11	0.03	-0.64	0.01	0.05	0.06	18
	5	-0.03	0.17	-0.08	-0.03	-0.61	0.10	0.02	0.02	21
2	0	-11.156	-11.788	-12.354	-10.823	-3.545	-11.563	2.390	2.472	9
	1	-2.167	-1.766	-1.449	-1.890	-1.865	-1.909	0.134	0.138	15
	2	-0.492	-0.287	-0.280	-0.394	-0.344	-0.360	-0.027	-0.025	21
	3	-0.029	-0.061	-0.041	-0.029	-0.091	-0.050	-0.025	-0.025	27
	4	-0.014	-0.034	-0.022	-0.019	-0.052	-0.027	-0.006	-0.006	33
	5	-0.005	-0.012	-0.007	-0.001	-0.019	-0.009	-0.002	-0.002	39
厳密解 ³⁾		0.658334 ($\tilde{u} \times 1000$)	1.192302 ($\tilde{v} \times 1000$)	0.762568 ($\tilde{w} \times 100$)	-5.308707 ($\tilde{\sigma}_x \times 10$)	-4.941908 ($\tilde{\sigma}_y \times 10$)	2.906972 ($\tilde{\tau}_{xy} \times 100$)	2.712872 ($\tilde{\tau}_{yz} \times 10$)	2.719427 ($\tilde{\tau}_{xz} \times 10$)	-
観測点		D, $z = -h/2$	C, $z = -h/2$	A, $z = -h/2$	A, $z = -h/2$	A, 2層目上	B, $z = -h/2$	C, $z = 0$	D, $z = 0$	-

表-2 逆対称4層積層板 $[0/90^\circ/0/90^\circ]$ の変位と応力の誤差 ($h/b = 3/10$) (%)

N_R	p	u	v	w	σ_x	σ_y	τ_{xy}	τ_{yz}^*	τ_{xz}^*	DOF
1	0	-41.92	-62.15	-28.59	-42.18	-33.49	-56.16	25.49	24.84	6
	1	-16.10	-21.17	-4.24	-15.63	-4.48	-19.67	1.19	1.04	9
	2	-14.23	-14.58	-3.97	-13.48	-1.09	-14.48	0.75	1.25	12
	3	-3.62	0.98	-0.94	-2.89	-7.68	-0.39	-0.60	-0.20	15
	4	-0.49	0.89	-0.43	-0.48	-4.42	0.48	-0.63	-0.36	18
	5	-0.32	0.45	-0.40	-0.32	-4.60	0.22	-0.32	-0.26	21
2	0	-52.62	-38.21	-23.24	-51.13	-14.17	-42.48	18.98	22.96	9
	1	-11.38	-5.65	-2.91	-10.69	-10.19	-7.35	0.56	0.89	15
	2	-3.38	-1.20	-0.88	-2.81	-0.90	-1.84	-1.24	-0.99	21
	3	-0.49	-0.55	-0.33	-0.43	-1.24	-0.53	-0.49	-0.49	27
	4	-0.05	-0.23	-0.10	-0.05	-0.53	-0.18	-0.14	-0.15	33
	5	-0.01	-0.09	-0.04	0.02	-0.22	-0.07	-0.05	-0.05	39
厳密解 ³⁾		3.053017 ($\tilde{u} \times 1000$)	7.251844 ($\tilde{v} \times 1000$)	2.780261 ($\tilde{w} \times 100$)	-8.485094 ($\tilde{\sigma}_x \times 10$)	-6.582170 ($\tilde{\sigma}_y \times 10$)	5.395613 ($\tilde{\tau}_{xy} \times 100$)	2.173244 ($\tilde{\tau}_{yz} \times 10$)	2.300846 ($\tilde{\tau}_{xz} \times 10$)	-
観測点		D, $z = -h/2$	C, $z = -h/2$	A, $z = -h/2$	A, $z = -h/2$	A, 2層目上	B, $z = -h/2$	C, $z = 0$	D, $z = 0$	-

(1) の展開次数は、各変位成分で同じ $p_u^r = p_v^r = p_w^r = p$ とし、解の収束性の確認のため $p=0 \sim 5$ まで採っている。

まず、表-1 の板厚比 $h/b=1/10$ の中等厚の場合には、領域数 $N_R=1$ のときでも解の収束性は良好である。 $p=0$ (ES11) では誤差が大きいが、ZIG-ZAG 項を加えた $p=1$ (ZZ11W) では精度が大きく改善され、 $p=3$ まで次数を増加させると、変位と応力の誤差は厳密解に対して 1%以下となっている。領域数 $N_R=2$ のときには収束性がさらに改善され、次数 $p=2$ を用いれば、変位と応力の誤差は 1%以下となる。

一方、表-2 の $h/b=3/10$ の厚板の場合には、表-1 の中等厚の場合に比べると精度が少し悪くなるが、領域数 $N_R=1$ のときに次数 $p=4$ を用いると σ_y を除き 1%以下に、 $N_R=2$ のときに次数 $p=4$ を用いれば、変位と応力の厳密解に対する誤差が 1%以下となっている。

以上のように、変位と応力の収束性は良好であり、領域数 N_R を増やすことで、収束性が大きく改善されている。

3.3 改良面外応力の効果

図-3 には板厚比 $h/b=3/10$ における式 (2), (3) の構成方程式から計算した面外応力の 3 成分 $\sigma_z^{r(k)}$, $\tau_{yz}^{r(k)}$, $\tau_{xz}^{r(k)}$ の、図-4 には式 (5) から計算した改良面外応力の 3 成分 $\sigma_z^{r(k)*}$, $\tau_{yz}^{r(k)*}$, $\tau_{xz}^{r(k)*}$ の板厚方向の分布図を示す。領域数は $N_R=2$ としている。

構成方程式から計算した図-3 の面外応力は、次数 p を増加させても、領域境界と領域内の層境界において不連続な分布となっており、さらに、板上下縁においての境界条件も満足していない。なお、式 (2), (3) の構成方程式から連続条件と境界条件を満たす面外応力を計算するには、各層を 1 つの領域として取り扱い、次数 p を高次に設定する必要がある。

一方、式 (5) の三次元弾性理論の平衡方程式から計算した図-4 の改良面外応力では、どの応力成分でも、領域境界と領域内の層境界での連続性を満足し、板上下縁においての境界条件も満足している。次数 $p=0$ では誤差が大きいが、次数 $p=1$ を用いれば厳密解と良く

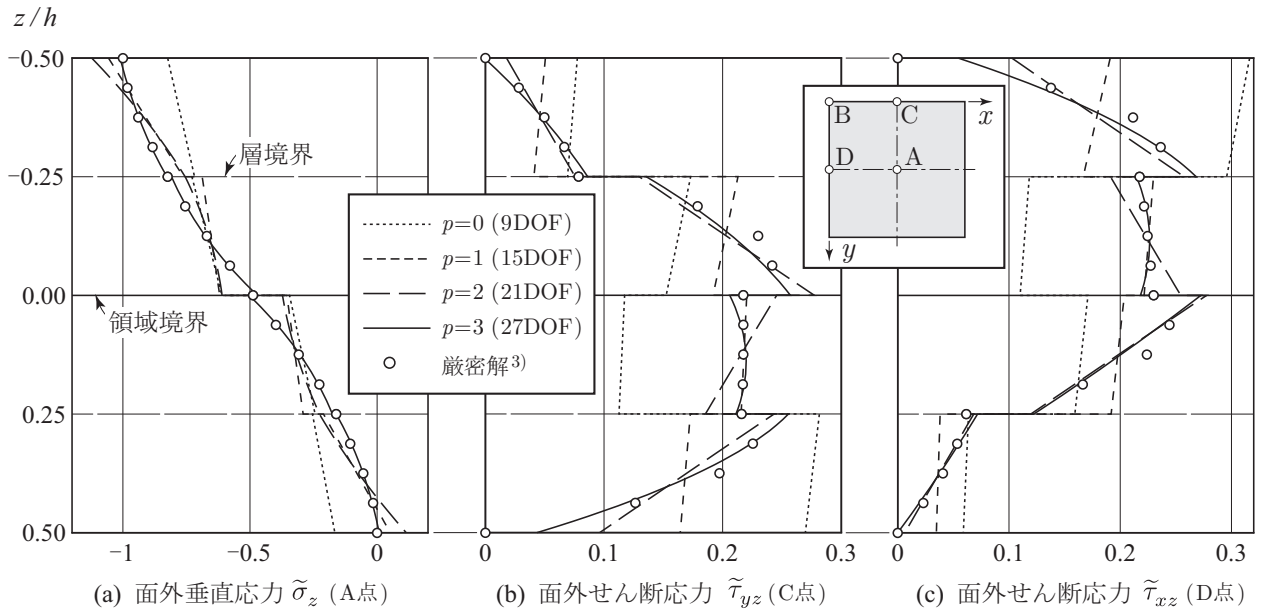


図-3 構成方程式から計算した面外応力（逆対称4層積層板 $[0/90^\circ/0/90^\circ]$, $N_R=2$, $h/b=3/10$ ）

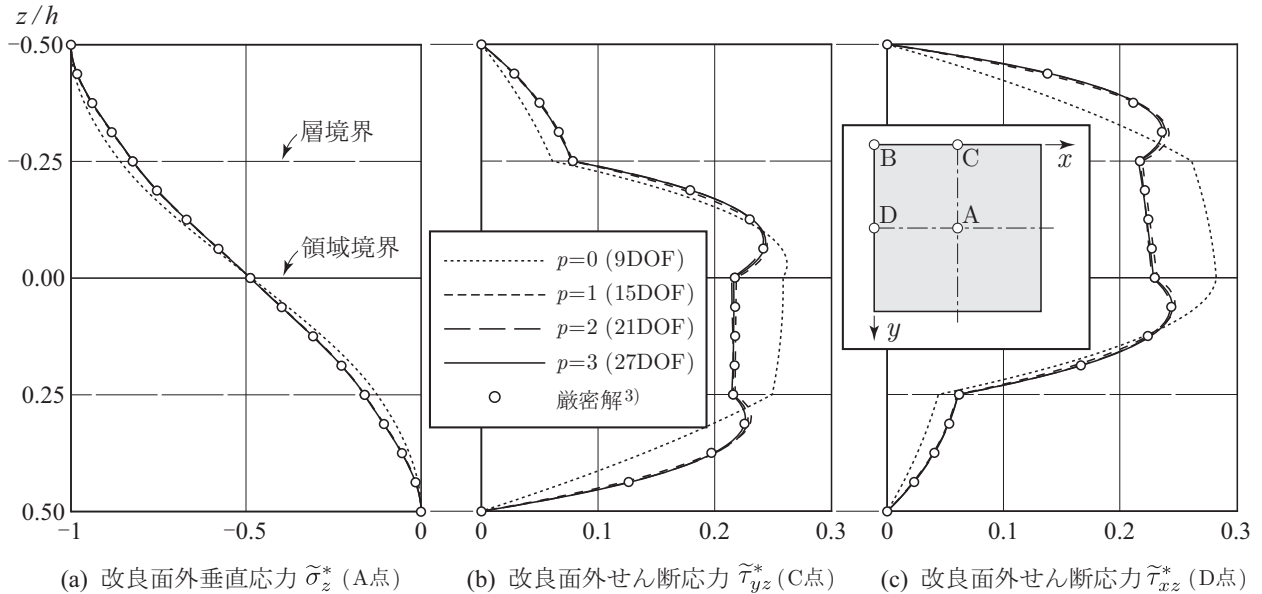


図-4 改良面外応力の分布（逆対称4層積層板 $[0/90^\circ/0/90^\circ]$, $N_R=2$, $h/b=3/10$ ）

一致した値が得られている。

を計算できる。

4. まとめ

Region-wise ZIG-ZAG 理論を逆対称4層積層板の曲げ解析に用いて、精度を検証した。Region-wise ZIG-ZAG 理論の変位と応力の収束性は良好で、次数を高めることによって、中等厚板や厚板に対しても精度の良い変位と応力を計算できる。さらに、面外応力の領域境界と領域内の層境界での連続性、板上下縁での境界条件を満足させるために、三次元弾性理論の平衡方程式から計算した改良面外応力が有効で、Region-wise ZIG-ZAG 理論に適用した場合にも精度の良い面外応力

謝辞： 本研究は JSPS 科研費 JP19K04586 の補助を受けた。ここに、記して感謝の意を表する。

参考文献

- 1) 渡辺 力：効果的な ZIG-ZAG 関数の開発と異方性積層板ならびに等方性平板の厚板解析への適用，土木学会論文集 A2（応用力学），Vol.74, No.1, pp.75-91, 2018.
- 2) 渡辺 力：複合材料ならびに等方性材料からなる積層構造のための Region-wise ZIG-ZAG 理論の開発，土木学会論文集 A2（応用力学），Vol.76, No.1, pp.58-74, 2020.
- 3) Pagano, N. J. : Exact solutions for rectangular bidirectional composites and sandwich plates, *J. Compos. Mater.*, Vol.4, pp.20-34, 1970.