

Region-wise ZIG-ZAG 理論による異方性積層板の曲げ解析

Bending analysis of anisotropic laminated plates by using region-wise ZIG-ZAG theory

函館工業高等専門学校
函館工業高等専門学校学生会員 ○佐野 凌希 (Ryoki SANO)
正 員 渡辺 力 (Chikara WATANABE)

1. まえがき

繊維強化プラスチック (FRP) などの異方性積層板では、板厚比が大きくなると ZIG-ZAG 変位の影響が顕著に現れ、従来の等価単層理論では高次理論を用いても精度が悪くなる。そのため、ZIG-ZAG 理論や Layer-wise 理論などの様々な理論の研究が行われている。

FRP で補強された鋼やコンクリート構造に ZIG-ZAG 理論を適用するために、改良 ZIG-ZAG 理論が開発されている¹⁾。さらに、この理論を剥離解析やサンドイッチ構造に適用するために、Region-wise ZIG-ZAG 理論の開発を進めている²⁾。この Region-wise ZIG-ZAG 理論は、改良 ZIG-ZAG 理論と Layer-wise 理論³⁾を融合したもので、自由度を領域境界と領域内部に与え、領域内部の ZIG-ZAG 変位を効率的に表現するために高次の改良 ZIG-ZAG 理論を用いている。

本研究では、異方性積層板の曲げ解析に Region-wise ZIG-ZAG 理論を適用して、この理論の精度を検証するとともに、Layer-wise 理論と計算効率を比較することを目的としている。対称6層積層板の級数解により、厳密解に対する精度を検証し、Layer-wise 理論と計算効率を比較した結果について報告する。

2. Region-wise ZIG-ZAG 理論

Region-wise ZIG-ZAG 理論は、改良 ZIG-ZAG 理論と Layer-wise 理論を融合したものである。まず、板厚 h の異方性積層板あるいはサンドイッチ板を、図-1に示すように板厚方向に対して N_R 個の領域に分ける。

図-1における第 r 番目の領域を図-2に示す。領域境界の z 座標値を z_r, z_{r+1} とし、領域内の層数を N_r 、領域の厚さを h_r 、第 k 層目の厚さを $h^{r(k)}$ とする。また、領域内に変域 $[-1, 1]$ の正規化座標 ζ^r を設ける。

$$\zeta^r = \frac{2}{h_r}(z - z_m^r), \quad z_m^r = (z_{r+1} + z_r)/2 \quad (1)$$

ここに、式(1)の z_m^r は領域 r の中央点の z 座標値である。

2.1 変位場

Region-wise ZIG-ZAG 理論では、図-2に示す領域 r 第 k 層の変位を次式で与える。

$$\left. \begin{aligned} u^{r(k)} &= f_0^r u_r + f_1^r u_{r+1} + \sum_{s=1}^{p_u^r} \phi_{us}^{r(k)} u_s^r \\ v^{r(k)} &= f_0^r v_r + f_1^r v_{r+1} + \sum_{s=1}^{p_v^r} \phi_{vs}^{r(k)} v_s^r \\ w^{r(k)} &= f_0^r w_r + f_1^r w_{r+1} + \sum_{s=1}^{p_w^r} \phi_{ws}^{r(k)} w_s^r \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

ここに、式(2)の右辺第1項と第2項が領域境界変位の項で、第3項が領域内部変位の項である。 u_r, u_{r+1} などは図-1に示す領域 r の境界変位で、 u_s^r, v_s^r, w_s^r は領域 r の内部変位を表す。 s は板厚方向 (ζ^r 方向) の補間関数 (多項式) の次数を表し、 p_u^r, p_v^r, p_w^r は各変位成分の領域 r での展開次数を表す。

領域内部変位の項 (式(2)の右辺第3項) において、 $s=1$ の場合が ZIG-ZAG 項で、 $\phi_{u1}^{r(k)}, \phi_{v1}^{r(k)}, \phi_{w1}^{r(k)}$ が領域 ZIG-ZAG 関数、 u_1^r, v_1^r, w_1^r が領域 ZIG-ZAG 変位である。また、 $s \geq 2$ の場合が領域高次変位の項で、 u_s^r, v_s^r, w_s^r ($s \geq 2$) は領域内部変位の高次項である。

2.2 補間関数と領域 ZIG-ZAG 関数

1) 領域境界

領域境界変位の補間関数には次式を用いる。

$$f_0^r = \frac{1}{2}(1 - \zeta^r), \quad f_1^r = \frac{1}{2}(1 + \zeta^r) \quad (3)$$

2) 領域内部 $s=1$ (領域 ZIG-ZAG 関数)

領域内部変位の項 $s=1$ の関数には、次の領域 ZIG-ZAG 関数を用いる。この領域 ZIG-ZAG 関数は、図-2(a)の改良 ZIG-ZAG 関数において領域下端の関数値がゼロとなるように補正を行ったもので、図-2(b)のように領域上端と領域下端で関数値はゼロとなる。

$$\left. \begin{aligned} \phi_{u1}^{r(k)} &= (\beta_u^{r(k)} - F_u^r/2) \zeta^r + a_u^{r(k)} \\ \phi_{v1}^{r(k)} &= (\beta_v^{r(k)} - F_v^r/2) \zeta^r + a_v^{r(k)} \\ \phi_{w1}^{r(k)} &= (\beta_w^{r(k)} - F_w^r/2) \zeta^r + a_w^{r(k)} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} a_u^{r(k)} &= (\beta_u^{r(1)} - F_u^r/2) + \sum_{i=2}^k \zeta_i^r (\beta_u^{r(i-1)} - \beta_u^{r(i)}) \\ a_v^{r(k)} &= (\beta_v^{r(1)} - F_v^r/2) + \sum_{i=2}^k \zeta_i^r (\beta_v^{r(i-1)} - \beta_v^{r(i)}) \\ a_w^{r(k)} &= (\beta_w^{r(1)} - F_w^r/2) + \sum_{i=2}^k \zeta_i^r (\beta_w^{r(i-1)} - \beta_w^{r(i)}) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

式(4)、(5)の $\beta_u^{r(k)}, \beta_v^{r(k)}, \beta_w^{r(k)}$ は領域 ZIG-ZAG 関数の勾配である。また、 F_u^r などは図-2(a)に示す改良 ZIG-ZAG 関数の領域下端での関数値である。

3) 領域内部 $s \geq 2$

領域内部変位の項 $s \geq 2$ の補間関数には、領域上下端で関数値がゼロの条件を満たすハイアラーキ多項式を用いる。Layer-wise 理論では補間関数に Lagrange 多項式が用いられるが、このハイアラーキ多項式は数値計算が容易で、この多項式を用いた剛性行列の条件数は Lagrange 多項式を用いた場合に比べ小さく、消去演算での桁落ちが少なくなる。

表-1 対称6層積層板 $[0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ の変位と応力の誤差 ($h/b=3/10$) (%)

N_R	p	u	v	w	σ_x	σ_y	τ_{xy}	τ_{yz}^*	τ_{xz}^*	DOF
1	0	-42.213	-53.705	-25.914	-42.245	-22.664	-49.829	27.834	-10.511	6
	1	-27.723	-18.356	-5.451	-26.544	-6.932	-21.515	-1.520	12.147	9
	2	-22.496	-13.911	-5.226	-21.274	-4.178	-16.806	-1.584	12.092	12
	3	-2.077	0.034	-0.525	-1.396	-3.391	-0.678	-0.091	0.076	15
	4	-1.213	0.342	-0.365	-1.113	-2.870	-0.182	0.060	0.219	18
	5	-0.196	0.630	-0.228	-0.146	-2.133	0.351	-0.059	1.250	21
2	0	-39.993	-51.580	-24.899	-39.431	-21.076	-47.672	28.567	-9.938	9
	1	-24.339	-14.718	-5.267	-23.240	-4.005	-17.963	-1.424	12.265	15
	2	-3.249	-0.574	-0.634	-2.606	-2.571	-1.476	-0.321	-0.991	21
	3	-1.237	0.276	-0.346	-1.096	-2.766	-0.234	-0.067	0.595	27
	4	-0.190	0.662	-0.119	-0.183	-2.194	0.375	-0.007	-0.083	33
	5	-0.145	0.550	-0.090	-0.145	-1.866	0.316	0.007	-0.044	39
3	0	-29.404	-25.154	-15.432	-28.469	-15.132	-26.587	-13.697	-1.224	12
	1	-6.783	-3.255	-1.521	-6.256	-5.730	-4.445	0.074	-0.172	21
	2	-1.553	-0.436	-0.345	-1.194	-0.540	-0.813	-0.364	0.403	30
	3	-0.061	-0.143	-0.058	-0.048	-0.350	-0.115	-0.045	-0.087	39
	4	-0.010	-0.072	-0.022	-0.020	-0.173	-0.051	0.005	-0.034	48
	5	-0.004	-0.027	-0.008	0.009	-0.069	-0.020	0.002	-0.011	57
LW	1	-6.897	-3.303	-1.597	-6.365	-5.723	-4.515	-0.636	-8.616	21
	2	-0.225	-0.156	-0.094	-0.142	-0.174	-0.179	0.184	4.553	39
	3	-0.001	-0.001	-0.0003	0.011	0.012	-0.001	-0.009	-0.232	57
厳密解 ⁴⁾		2.849619 ($\tilde{u} \times 1000$)	5.599548 ($\tilde{v} \times 1000$)	2.616745 ($\tilde{w} \times 100$)	-7.907901 ($\tilde{\sigma}_x \times 10$)	-5.986812 ($\tilde{\sigma}_y \times 10$)	4.423974 ($\tilde{\tau}_{xy} \times 100$)	1.763176 ($\tilde{\tau}_{yz} \times 10$)	2.979940 ($\tilde{\tau}_{xz} \times 10$)	—
観測点		D, $z = -h/2$	C, $z = -h/2$	A, $z = -h/2$	A, $z = -h/2$	A, 2層目上縁	B, $z = -h/2$	C, $z = 0$	D, $z = 0$	—

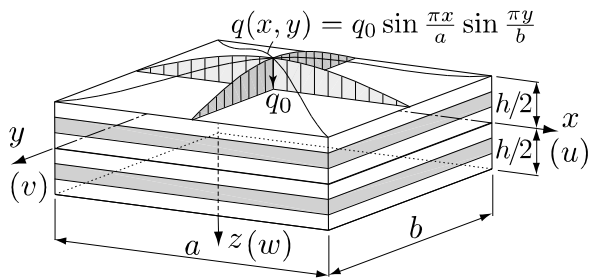


図-3 計算モデル (対称6層積層板)

数 $p=0$ では誤差が大きくなっているが、次数 $p=1$ として ZIG-ZAG 項を加えると精度が大きく改善されている。

$N_R=1$ の場合には $p=4$ (DOF=18), $N_R=2$ の場合には $p=3$ (DOF=27), $N_R=3$ の場合には $p=2$ (DOF=30) に採ると変位と応力の誤差はほぼ 1%程度となっている。これより, Region-wise ZIG-ZAG 理論では, 誤差 1%程度の解を計算する場合, 領域数 N_R を少なくした方が未知自由度数 (DOF) が少なくなり, 効率的に計算できることが分かる。

一方, Layer-wise 理論 (LW) では, 次数を増加させることで高精度の解が得られるが, それに伴い未知自由度数 (DOF) が急激に増加する。特に, 面外せん断応力 τ_{xz} は誤差が大きく, 誤差 1%程度の解を得るためには

$p=3$ (DOF=57) を用いる必要がある。

Region-wise ZIG-ZAG 理論と Layer-wise 理論の未知自由度数を比較すると, Region-wise ZIG-ZAG 理論では約 1/3~1/2 程度の未知自由度数 (DOF) で誤差 1%程度の解を計算できている。よって, Region-wise ZIG-ZAG 理論は, Layer-wise 理論に比べて, 効率的に高精度な解を計算することができると言える。

3.3 解の収束性

図-4 には, 対称6層積層板において領域数 $N_R=1$ とした場合の変位の3成分と面外応力の3成分の板厚方向の分布を示す。

図-4(a)の変位の分布を見ると, 面内変位 u , v に ZIG-ZAG 変位が生じているが, 面内変位 v では, 1層と2層, 5層と6層で ZIG-ZAG 分布となっていない。これは外側弱層の影響によるものであり, 式(2)の変位場により層間での連続性を満足している。また, 変位の収束性は良好で, 次数 $p=0$ では, 等価単層理論と同様に板厚全体で直線分布であるが, 次数 $p=1$ として ZIG-ZAG 項を付加すると ZIG-ZAG 分布を表現できており, 次数 $p=3$ とすると厳密解と良く一致した値が得られている。面外変位 w では, 面内変位 u , v と異なり ZIG-ZAG な変位とならないが, 次数 $p=3$ に採ると厳密解と良く一致した値が得られている。

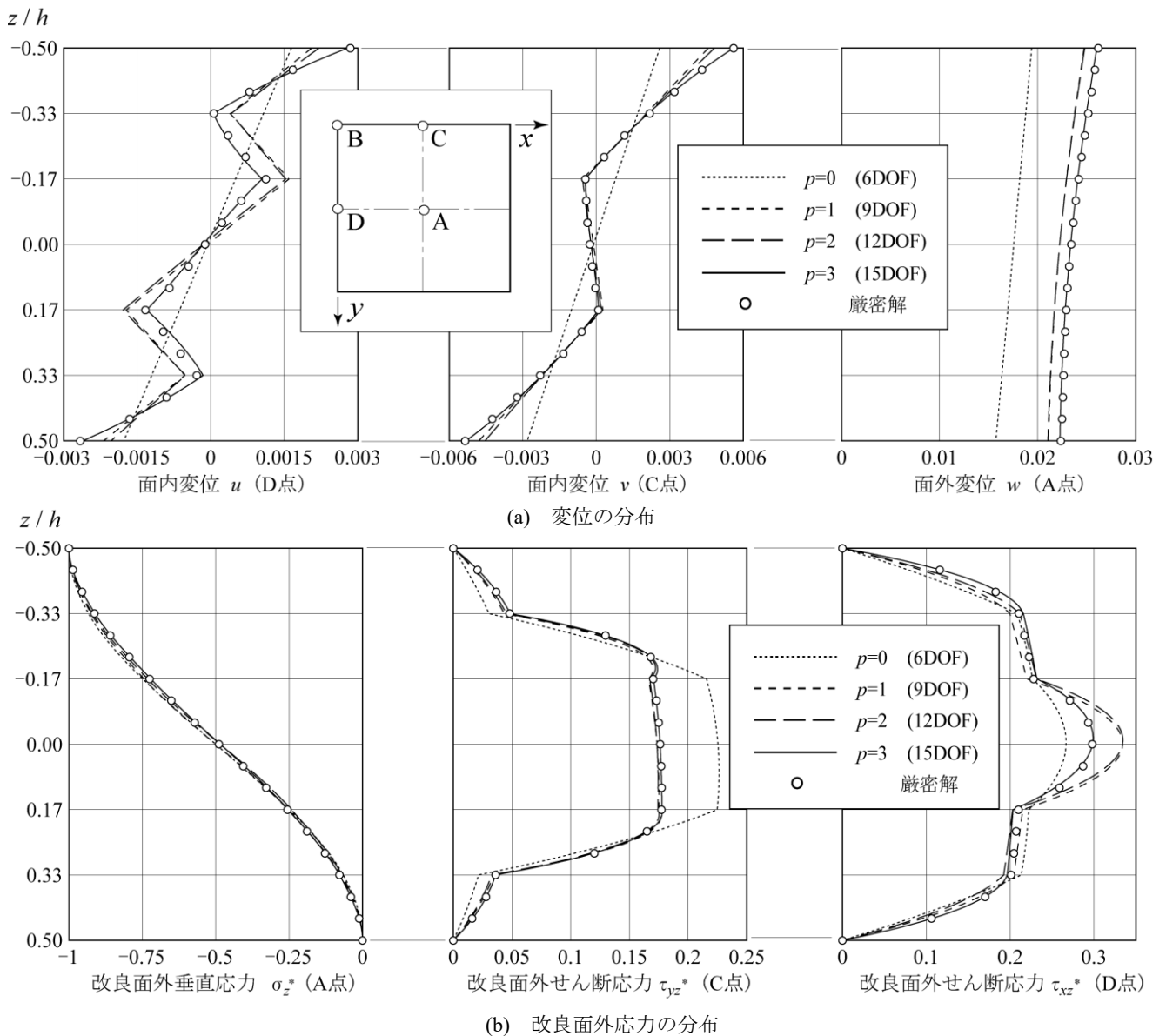
図-4 対称6層積層板 $[0/90^\circ/0/0/90^\circ/0]$ の変位と改良面外応力の分布 (領域数 $N_R=1$)

図-4(b)は、構成方程式を用いずに三次元弾性理論の平衡方程式から計算した改良面外応力である^{1),2)}。どの次数においても、層間での連続性、上下縁での境界条件を満足する値が得られている。改良面外応力の収束性も良好で、改良面外垂直応力 σ_z^* では $p=0$ 、改良面外せん断応力 τ_{yz}^* では $p=1$ 、 τ_{xz}^* では $p=3$ を用いると厳密解と良く一致した値が得られている。

4. まとめ

Region-wise ZIG-ZAG 理論を対称6層積層板の曲げ解析に用いて厳密解に対する精度を調べ、Layer-wise 理論と効率性を比較した。Region-wise ZIG-ZAG 理論では、領域数に依らず展開次数を高めることで高精度の解を得ることができ、解の収束性も良好である。

さらに、Layer-wise 理論に比べて約 $1/3 \sim 1/2$ 程度の未知自由度数 (DOF) で、誤差 1% 程度の変位と応力を効率的に計算することができる。

謝辞：本研究は JSPS 科研費 JP19K04586 の補助を受けた。ここに、記して感謝の意を表する。

参考文献

- 1) 渡辺 力：効果的な ZIG-ZAG 関数の開発と異方性積層板ならびに等方性平板の厚板解析への適用，土木学会論文集 A2 (応用力学)，Vol.74, No.1, pp.75-91, 2018.
- 2) 渡辺 力：複合材料ならびに等方性材料からなる積層構造のための Region-wise ZIG-ZAG 理論の開発，土木学会論文集 A2 (応用力学)，Vol.76, No.1, pp.58-74, 2020.
- 3) 渡辺 力，佐野凌希：Layer-wise 理論ならびに改良 ZIG-ZAG 理論による異方性積層板の曲げ解析，土木学会北海道支部論文報告集，第76号，A-42, 2020.
- 4) Pagano, N.J. : Exact solutions for rectangular bidirectional composites and sandwich plates, J.Compos.Master., Vol.4, pp.20-34, 1970.