

基本解近似解法を用いた面外波動散乱解析

Analysis of anti-plane wave scattering using the method of fundamental solutions

北海道大学工学部 ○ 学生員 松村耕佑 (Kosuke Matsumura)
 北海道大学工学研究院 正会員 古川陽 (Akira Furukawa)

1. はじめに

波動問題の数値シミュレーションは、非破壊評価の分野で広く用いられている。その代表的な手法として、有限差分法や有限要素法、境界要素法が挙げられる。これらの手法は、主に領域や境界のメッシュ分割によって解析を実現している。基本解近似解法 (MFS; the method of fundamental solutions) は、支配方程式の基本解を用いて解析を行うメッシュフリー型の数値シミュレーション手法^{1, 2)}である。この手法では領域や境界の要素分割の必要がないため、有限差分法や有限要素法と比較して解析における未知量が少なく済むことが知られている。また、境界要素法と比較して、数値計算の実装が容易であるという利点も有している。

以上の背景を踏まえ、本研究では、基本解近似解法を等方性弾性体の面外波動散乱問題に適用し、その基本的な性質について確認する。本稿では、まず、基本解近似解法の定式化についてまとめ、続けて、数値解析例を示す。以下では、特に断りのない限り、1つの項の中に繰り返し現れる下付き添え字に対して総和規約を適用する。また、ギリシャ文字による下付き添え字は1, 2をとるものとする。

2. 解析手法

2.1 対象とする問題

等方で均質な線形弾性体の面外波動散乱問題に対する周波数領域解法を考える。解析対象として、図-1に示すような外部領域 V を考える。ここで、 ∂V は散乱体の境界、 V_C は補領域を表す。周波数領域における等方性弾性体の運動方程式は、物体力をゼロと仮定すると、以下の式で与えられる。

$$\mu \frac{\partial^2 \tilde{u}(\mathbf{x})}{\partial x_\beta \partial x_\beta} + \rho \omega^2 \tilde{u}(\mathbf{x}) = 0 \quad (1)$$

ここに、 $\tilde{u}(\mathbf{x})$ は位置 $\mathbf{x}$ における面外波動変位、 ω は角周波数を表す。また、 μ は弾性体のせん断弾性係数、 ρ は弾性体の密度を表す。なお、 $\tilde{u}(\mathbf{x})$ は以下の関係式を満たすもの

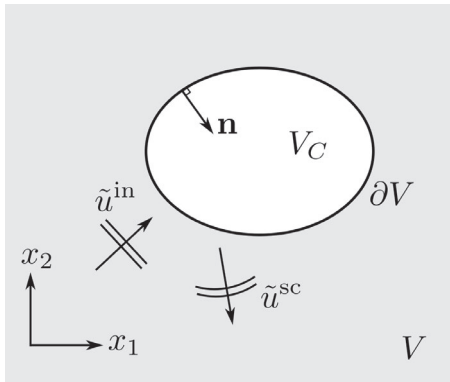


図-1 対象とする問題

とする。

$$\tilde{u}(\mathbf{x}) = \tilde{u}^{\text{in}}(\mathbf{x}) + \tilde{u}^{\text{sc}}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in V \cup \partial V \quad (2)$$

ここに、 $\tilde{u}^{\text{in}}(\mathbf{x})$ は入射波、 $\tilde{u}^{\text{sc}}(\mathbf{x})$ は散乱波を表す。ただし、散乱波は放射条件を満たすものとする。

上述の波動散乱問題は、式 (1) に適切な境界条件を与えることで解くことができる。例えば、変位固定の場合、境界条件は次式で与えられる。

$$\tilde{u}(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial V \quad (3)$$

一方、表面力フリーの場合、境界条件は次式で与えられる。

$$\tilde{t}(\mathbf{x}) = \mu \frac{\partial \tilde{u}}{\partial n_x}(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial V \quad (4)$$

ただし、 $\partial/\partial n_x$ は、境界 ∂V 上での法線方向微分を表す。

2.2 基本解近似解法

前節に示した波動散乱問題に対する基本解近似解法について考える。式 (1) に示した運動方程式に対する基本解 $\tilde{U}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ は、次式で与えられる。

$$\tilde{U}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{i}{4\mu} H_0^{(1)}(k_T r) \quad (5)$$

ここに、 $\mathbf{x}$ は観測点、 $\mathbf{y}$ は源点を表す。また、 k_T は面外波動の波数、 $H_n^{(1)}$ は n 次の第一種ハンケル関数を表す。なお、 $r = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ および $i = \sqrt{-1}$ である。

基本解近似解法を用いた変位固定問題の解法について考える。このとき、領域内および境界上の変位は式 (5) に示す基本解を用いて、次式で表現される。

$$\tilde{u}(\mathbf{x}) := \tilde{u}^{\text{in}}(\mathbf{x}) + \sum_{k=1}^N \tilde{U}(\mathbf{x}, \mathbf{y}_k) \tilde{c}_k \quad (6)$$

ただし、 $\mathbf{x} \in V \cup \partial V$ および $\mathbf{y}_k \in V_C$ である。なお、式 (6) に含まれる係数 $\tilde{c}_k$ は、境界条件によって決定される。本研究では、散乱体の境界 ∂V 上に選点 $\mathbf{x}_i$ ($i = 1, 2, \dots, M$) を配置し、その選点上で境界条件を満たすように係数 $\tilde{c}_k$ を決定する。このとき、解くべき方程式は以下の通りになる。

$$\tilde{\mathbf{A}} \tilde{\mathbf{c}} = \tilde{\mathbf{f}} \quad (7)$$

ここに、

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \tilde{U}(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1) & \tilde{U}(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_2) & \cdots & \tilde{U}(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_N) \\ \tilde{U}(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_1) & \tilde{U}(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2) & \cdots & \tilde{U}(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{U}(\mathbf{x}_M, \mathbf{y}_1) & \tilde{U}(\mathbf{x}_M, \mathbf{y}_2) & \cdots & \tilde{U}(\mathbf{x}_M, \mathbf{y}_N) \end{bmatrix} \quad (8)$$

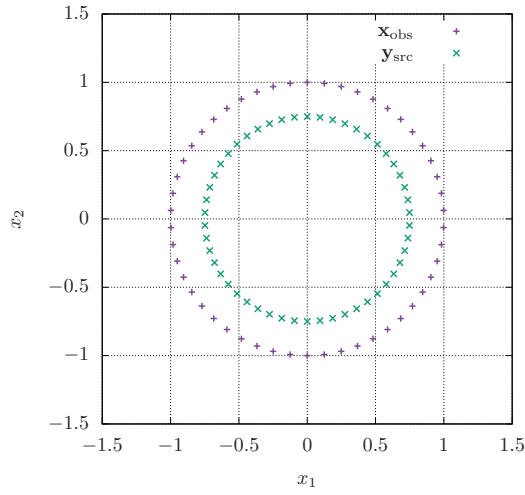
$$\tilde{\mathbf{c}} = [\tilde{c}_1 \ \tilde{c}_2 \ \cdots \ \tilde{c}_N]^T \quad (9)$$

$$\tilde{\mathbf{f}} = -[\tilde{u}^{\text{in}}(\mathbf{x}_1) \ \tilde{u}^{\text{in}}(\mathbf{x}_2) \ \cdots \ \tilde{u}^{\text{in}}(\mathbf{x}_M)]^T \quad (10)$$

である。ただし、 $[\]^T$ はベクトルの転置を表す。

表面フリー問題も、変位固定問題と同様の手順で解くことができる。このとき、境界 ∂V 上の表面力は、式 (6) を用いれば、以下のように表現できる。

$$\tilde{t}(\mathbf{x}) := \tilde{t}^{\text{in}}(\mathbf{x}) + \sum_{k=1}^N \tilde{T}(\mathbf{x}, \mathbf{y}_k) \tilde{c}_k \quad (11)$$


 図-2 選点 $\mathbf{x}_i$ と源点 $\mathbf{y}_k$ の配置

ただし, $\mathbf{x} \in \partial V$ および $\mathbf{y}_k \in V_C$ である. また, 表面力に対する基本解 $\tilde{T}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ は以下の通りとなる.

$$\tilde{T}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mu \frac{\partial \tilde{U}}{\partial n_x}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\frac{i}{4\mu} H_1^{(1)}(k_T r) \frac{\partial r}{\partial x_\beta} n_\beta \quad (12)$$

ここに, n_β は境界 ∂V 上の外向き単位法線ベクトルを表す. 変位固定問題と同様に, 境界上の M 個の選点 $\mathbf{x}_i$ において, 式 (4) を満たす条件を考えれば, 次式を得る.

$$\tilde{\mathbf{B}} \tilde{\mathbf{c}} = \tilde{\mathbf{g}} \quad (13)$$

ここに,

$$\tilde{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \tilde{T}(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1) & \tilde{T}(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_2) & \cdots & \tilde{T}(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_N) \\ \tilde{T}(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_1) & \tilde{T}(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2) & \cdots & \tilde{T}(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{T}(\mathbf{x}_M, \mathbf{y}_1) & \tilde{T}(\mathbf{x}_M, \mathbf{y}_2) & \cdots & \tilde{T}(\mathbf{x}_M, \mathbf{y}_N) \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$\tilde{\mathbf{g}} = -[\tilde{t}^{\text{in}}(\mathbf{x}_1) \ \tilde{t}^{\text{in}}(\mathbf{x}_2) \ \cdots \ \tilde{t}^{\text{in}}(\mathbf{x}_M)]^T \quad (15)$$

である. 式 (13) を解くことで, 未知の係数 $\tilde{c}_k$ を求めることができる.

3. 数値解析例

前節に示した基本解近似解法を用いた数値解析例を示し, その妥当性を確認する. 本稿では, 等方性弾性体の面外波動散乱問題のうち, 波動関数展開 (WFE; wave function expansion) による解析解³⁾が存在する問題を取り扱う. この問題では, 散乱体は, 半径を $a = 1$, 中心を原点とする円であり, 入射波は次式で与えられる.

$$\tilde{u}^{\text{in}}(\mathbf{x}) = \exp[ik^{\text{in}} x_1] \quad (16)$$

ただし, 入射波の波数は $k^{\text{in}} = 1$ とした. また, 解析に用いる選点 $\mathbf{x}_i$ および源点 $\mathbf{y}_k$ の数は $M = N = 50$ とし, その配置は図-2の通りとした. 同図に示すように, 源点 $\mathbf{y}_k$ は x_1 - x_2 座標系の原点を中心とし, 半径を 0.75 とする円の上に配置した. なお, その他のパラメータは $k_T a = 1$ となるように設定し, 連立 1 次方程式の求解には GMRES 法を用いた.

基本解近似解法によって得られた近似解と, 波動関数展開によって得られる解析解の比較を行う. 図-3 に変位固定の場合, 図-4 に表面力フリーの場合の計算結果を, それぞれ示す. これらの図に示す結果から, 基本解近似解法による近似解が解析解と概ね一致していることが確認された.

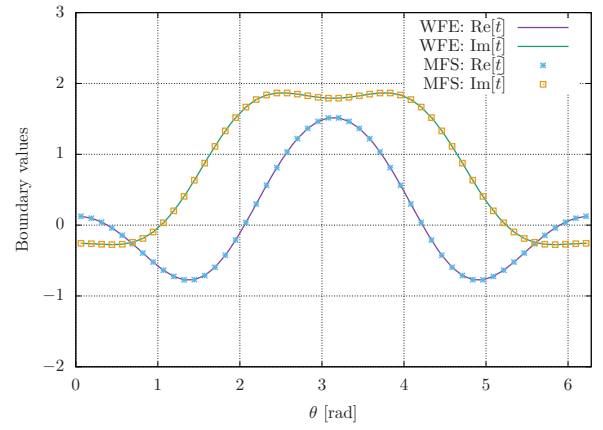


図-3 境界値の解析解と基本解近似解法による近似解の比較 (変位固定)

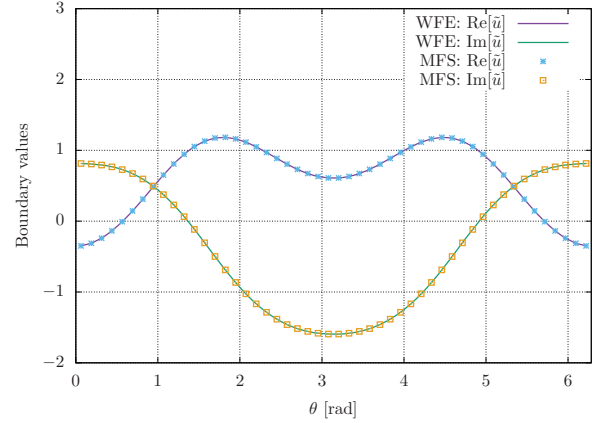


図-4 境界値の解析解と基本解近似解法による近似解の比較 (表面力フリー)

4. おわりに

本研究では, 基本解近似解法を用いて, 等方性弾性体の面外波動散乱解析を行った. はじめに, 対象とする問題について整理し, 解析領域の面外方向変位を周波数領域基本解を用いて表現した. 続けて, 面外方向変位の表示式に含まれる係数を, 選点法によって決定する方法について説明した. その後, 数値解析例を示し, 基本解近似解法による近似解は波動関数展開による厳密解と概ね一致することを確認した.

今後は, 解析に用いる源点の配置が計算結果に及ぼす影響を調べる. また, 異方性弾性体の面外波動散乱問題に対する基本解近似解法の開発に取り組む予定である.

参考文献

- 1) Fairweather, G., Karageorghis, A., Martin, P.A.: The method of fundamental solutions for scattering and radiation problems, *Eng. Anal. Bound. Elem.*, Vol.27, pp.759–769, 2003.
- 2) Cheng, A.H.D., Hong, Y.: An overview of the method of fundamental solutions –Solvability, uniqueness, convergence, and stability, *Eng. Anal. Bound. Elem.*, Vol.120, pp.118–152, 2020.
- 3) Mow, C.C., Pao, Y.H.: *Diffraction of Elastic Waves and Dynamic Stress Concentrations*, Crane, Russak, New York, USA, 1973.