

マッチング追跡アルゴリズムの周波数解析への適用

Implementation of matching pursuit algorithm to frequency analysis

北海道大学工学部 ○ 学生員 大石裕貴 (Yuki Oishi)
 北海道大学工学研究院 正会員 古川陽 (Akira Furukawa)

1. はじめに

土木工学分野において、周波数解析は、地震動の解析や構造物の地震応答解析、さらにはモニタリングや非破壊評価¹⁾など、様々な場面で用いられている。これらの解析では、一般に、高速 Fourier 変換を用いた周波数解析が用いられる。高速 Fourier 変換は周波数解析における強力なツールとして知られているが、解析に用いる周波数の範囲や周波数の刻み幅が観測データのサンプリング条件によって固定される。また、データ数が少ない場合には、十分な精度で周波数解析を実施することが困難である。

以上を踏まえ、本研究では、貪欲法の一つであるマッチング追跡アルゴリズム²⁾を用いた周波数解析手法の開発を行う。提案手法は、解析に用いる周波数の範囲を任意に設定することが可能である。また、周波数の刻み幅の変更にも容易に対応することができる。本稿では、数値的に生成した観測信号を用いて、提案手法の基礎的な性質について考察を行う。

2. 解析手法

本研究では、以下に示す関数 $y(t)$ の有限 Fourier 近似³⁾をもとに、周波数解析手法の開発を行う。

$$y(t) \approx \sum_{k=1}^K (p_k \cos 2\pi f_k t + q_k \sin 2\pi f_k t) \quad (1)$$

ここに、 t は時刻を表し、 $f_k (\in [f_{\min}, f_{\max}])$ は近似に用いる三角関数の離散周波数を表す。今、この関数 $y(t)$ を観測信号とみなし、標本点数 M 、時間刻み幅 Δt でサンプリングする。このとき、式 (1) に示す有限 Fourier 近似は、以下に示す線形システムによって表現することができる。

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{y} \quad (2)$$

ここに、

$$\mathbf{A} = [\mathbf{A}_c \ \mathbf{A}_s] \quad (3)$$

および、

$$\mathbf{A}_c = \begin{bmatrix} \cos 2\pi f_1 t_1 & \cos 2\pi f_2 t_1 & \dots & \cos 2\pi f_K t_1 \\ \cos 2\pi f_1 t_2 & \cos 2\pi f_2 t_2 & \dots & \cos 2\pi f_K t_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cos 2\pi f_1 t_M & \cos 2\pi f_2 t_M & \dots & \cos 2\pi f_K t_M \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$\mathbf{A}_s = \begin{bmatrix} \sin 2\pi f_1 t_1 & \sin 2\pi f_2 t_1 & \dots & \sin 2\pi f_K t_1 \\ \sin 2\pi f_1 t_2 & \sin 2\pi f_2 t_2 & \dots & \sin 2\pi f_K t_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sin 2\pi f_1 t_M & \sin 2\pi f_2 t_M & \dots & \sin 2\pi f_K t_M \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$\mathbf{x} = [p_1 \ p_2 \ \dots \ p_K \ q_1 \ q_2 \ \dots \ q_K]^T \quad (6)$$

$$\mathbf{y} = [y(t_1) - \bar{y} \ y(t_2) - \bar{y} \ \dots \ y(t_M) - \bar{y}]^T \quad (7)$$

である。ただし、 $[\]^T$ はベクトルの転置を表し、 $\bar{y}$ は次式で与えられる観測信号の平均値である。

$$\bar{y} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M y(t_i) \quad (8)$$

本研究では、式 (2) に示す線形システムに含まれる未知量ベクトル $\mathbf{x}$ の推定に、マッチング追跡アルゴリズムを適用する。

マッチング追跡アルゴリズムは、以下に示す最適化問題の解法として知られている。

$$\underset{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N}{\text{minimize}} \ \|\mathbf{x}\|_0 \text{ subject to } \mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (9)$$

ここに、 $\|\cdot\|_0$ はベクトルの l^0 ノルムを表す。具体的な計算では、まず行列 $\mathbf{A}$ を以下のように列ベクトル $\mathbf{a}_i$ ($i = 1, 2, \dots, N$) を用いて表現する。

$$\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \dots \ \mathbf{a}_N] \quad (10)$$

なお、本研究の場合、 $N = 2K$ となる。そして、初期条件を $\mathbf{x}[0] = \mathbf{0}, \mathbf{r}[0] = \mathbf{y}, k = 0$ で与え、以下の計算を繰り返す。

$$i[k] := \arg \max_i \frac{\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{r}[k] \rangle^2}{\|\mathbf{a}_i\|_2^2} \quad (11)$$

$$x[k] := \frac{\langle \mathbf{a}_{i[k]}, \mathbf{r}[k] \rangle}{\|\mathbf{a}_{i[k]}\|_2^2} \quad (12)$$

$$\mathbf{x}[k+1] := \mathbf{x}[k] + x[k] \mathbf{e}_{i[k]} \quad (13)$$

$$\mathbf{r}[k+1] := \mathbf{r}[k] - x[k] \mathbf{a}_{i[k]} \quad (14)$$

$$k := k+1 \quad (15)$$

ただし $\mathbf{e}_i$ は i 番目の成分にのみ値をもつ標準基底である。また、 $\|\cdot\|_2$ はベクトルの l^2 ノルム、 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ はベクトルの内積を表す。式 (11)–(15) に示す繰り返し計算は、 $k = N_{\text{itr}}$ を満たした際に終了する。この計算によって得られた結果は、次式を用いて、周波数 f に対応する信号の振幅 $|\alpha(f)|$ に変換する。

$$|\alpha(f_k)| = \sqrt{p_k^2 + q_k^2} \quad (16)$$

本研究では、この振幅 $|\alpha(f)|$ を用いて、周波数解析を実施する。

3. 数値解析例

本稿に示す数値解析例では、観測信号を次式で与える。

$$y(t_i) = \sum_{j=1}^{N^{\text{in}}} \alpha_j^{\text{in}} \sin(2\pi f_j^{\text{in}} t_i + \phi_j^{\text{in}}) \quad (17)$$

ただし、 $t_i = (i-1)\Delta t$ および $i = 1, 2, \dots, M$ である。本稿では、 $M = 128$ とし、時間刻み幅は $\Delta t = 0.02$ [μs] とした。また、観測信号の生成において、 $N^{\text{in}} = 3$ とした。このとき、式 (17) に示す観測信号の計算に必要なパラメータは、表-1 のように与えた。なお、図-1 には、この観測信号の時刻歴波形を示す。有限 Fourier 近似における離散周波数 f_k の数は $K = 128 (= M)$ とした。さらに、マッチング追跡アルゴリズムにおける反復回数の上限は $N_{\text{itr}} = 256 (= N)$ とした。本稿では、表-2 に示す 3 つの条件 (case1, case2, case3) で解析を実施し、提案手法の妥当性の確認と特徴の

表-1 観測信号の計算に用いるパラメータ

j	α_j^{in}	f_j^{in} [MHz]	ϕ_j^{in} [rad]
1	2	4	0
2	1	5	0.5
3	1.5	8	1

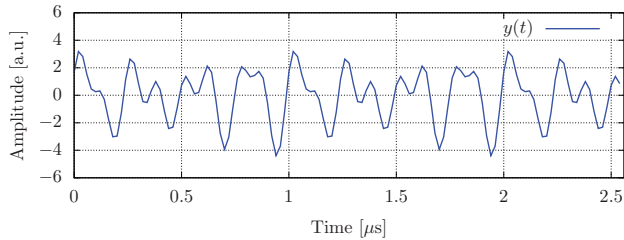


図-1 観測信号の時刻歴波形

把握を行う。

まず、提案手法の妥当性を確認する。図-2, 3 に, case1 において, 高速 Fourier 変換およびマッチング追跡アルゴリズムを用いて得られた振幅 $|\alpha(f)|$ をそれぞれ示す。これらの結果の比較から, 提案手法を用いた場合の解析結果は, 高速 Fourier 変換を用いた場合の結果と概ね一致することが確認された。

次に, 提案手法において, 解析に用いる周波数の範囲と周波数の刻み幅を変更した場合の振幅 $|\alpha(f)|$ の変化について考察する。図-4, 5 に, case2 および case3 において, 提案手法を用いた場合の振幅 $|\alpha(f)|$ の推定結果を示す。これらの結果の比較から, 適切に周波数の範囲を絞り込むことによってスペクトルのピークが鋭くなり, 振幅の値が真値に近づくことが確認された。

4. おわりに

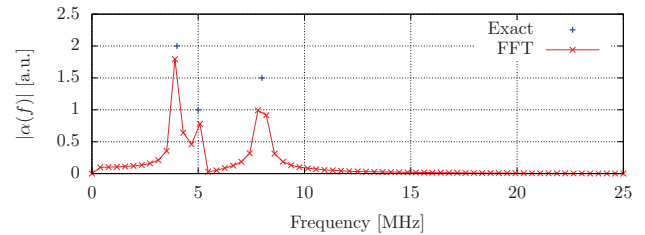
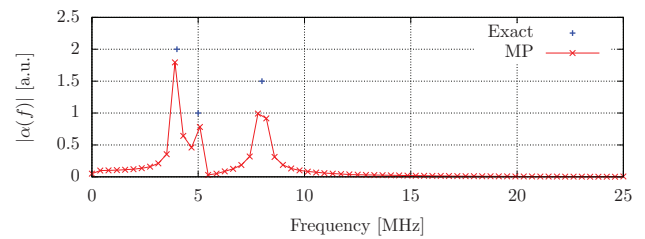
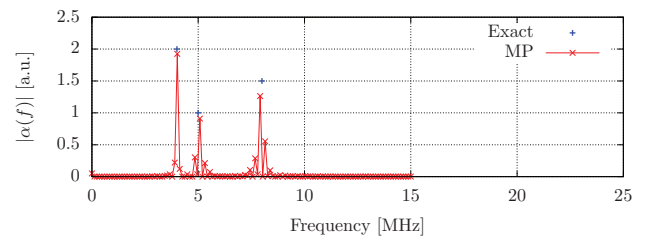
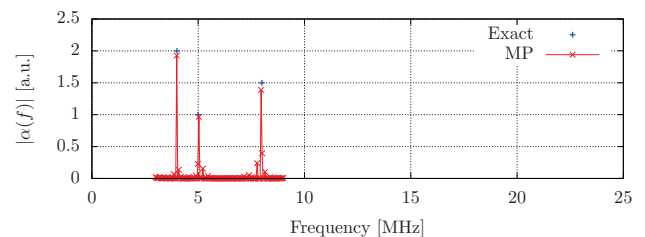
本研究では, マッチング追跡アルゴリズムを用いた周波数解析手法の開発を行った。はじめに, 有限 Fourier 近似を用いて, 観測信号から周波数領域における振幅 $|\alpha(f)|$ を求めるための線形システムを導出した。次に, 対象とする線形システムにマッチング追跡アルゴリズムを適用し, その具体的な計算方法を示した。数値解析例では, まず, 提案手法と高速 Fourier 変換による結果の比較を行い, その妥当性を確認した。その後, 離散周波数の範囲と刻み幅を変更し, それに伴う振幅 $|\alpha(f)|$ の変化を比較した。その結果, 適切に周波数の範囲と刻み幅を設定することで, 推定値が真値に近づくことを確認した。今後は, 観測雑音の影響の検証や, 離散周波数の適切な設定方法について検討する。そして, 提案手法の時間-周波数解析への適用を行う予定である。

参考文献

- 橘肇, 山口雄也, 中本啓介, 島田義則, オレグコチャエフ, 廣瀬壮一: レーザ法を用いた鋼板接着コンクリート床版の損傷部の検出, 構造工学論文集, Vol.61A, pp.544–551, 2015.
- 永原正章: スパースモデリング-基礎から動的システムへの応用-, コロナ社, 2004.
- 大崎順彦: 新・地震動のスペクトル解析入門, 鹿島出版会, 1994.

表-2 解析に用いる周波数の範囲とその刻み幅

	$f_{\min}$ [MHz]	$f_{\max}$ [MHz]	Δf [MHz]
case1	0	25	0.390625
case2	0	15	0.118110
case3	3	9	0.047244

図-2 高速 Fourier 変換によって得られた振幅 $|\alpha(f)|$ (case1)図-3 マッチング追跡アルゴリズムによって得られた振幅 $|\alpha(f)|$ (case1)図-4 マッチング追跡アルゴリズムによって得られた振幅 $|\alpha(f)|$ (case2)図-5 マッチング追跡アルゴリズムによって得られた振幅 $|\alpha(f)|$ (case3)