

Schrödinger 方程式による浅水包絡波高予測

Wave height prediction of shallow water wave packet by Schrödinger equation

北海道大学工学院 ○学生員 津田洋輔 (Yosuke Tsuda)

北海道大学工学研究院教授 正会員 渡部靖憲 (Yasunori Watanabe)

北海道大学工学研究院助教 正会員 猿渡亜由未 (Ayumi Saruwatari)

1. はじめに

沖合でしばしば観測される巨大波は多方向波浪の重合と波-波の非線形干渉などの様々な発生メカニズムに対して研究が進められている。一方分散性が低下する浅水域では、波が重合する前に砕波するため発生確率は極めて低いと考えられている。そのため沿岸域における巨大波に関する研究は少ない。しかしながら沿岸域においてもストーム時において周辺海域の波浪観測結果からは説明できない巨大波が発生し大規模な砕波によって、海岸構造物の被災、漁船の転覆などの被害が報告されている。

海洋物理学分野の砕波研究において、異なる周波数を持つ波のエネルギーを集中させ砕波を誘発する Wave focus 理論(Longuet-Higgins 1997)が存在する。Watanabe et al.(2019)はその理論を浅水域へ拡張し任意の底面地形において適用可能な Wave focus 理論の一般形を導出した。この浅水包絡波集中理論により、これまで海岸工学において考えられてきた、砕波水深によって定まる砕波規模を大きく上回る砕波の実現に成功している。しかしながらこの理論は包絡波の集中条件を角周波数によって定義するものであり、達成した集中包絡波の最大波高に言及するものではないため実践的应用は制限される。

そこで本研究は浅水域における Wave focus 理論から得られる位相や角周波数などを造波条件として用い、Schrödinger 方程式を解くことで包絡波の集中地点における波高を数値的に予想し、理論と実証実験結果を比較するものである。

2. 数値計算方法

本研究では、浅水域における Wave focus 理論を造波条件として適用し、その後の造波水槽内の波浪パラメータの時間発達を移流方程式により計算する。その値を用いて Schrödinger 方程式を計算し集中包絡波の波高の発達を数値的に予測する。

2.1 計算条件及び計算方法

浅水域における包絡波集中条件となる、造波板の位置における波の角周波数時間変化は式(1)により与える。その角周波数の時間変化を表したものが図1である。時間の経過とともに角周波数が減少し波の群速度は増加していく。すると先行する波のエネルギーに背後の波のエネルギーが次々と追いつく。式(1)はすべての波のエネルギーが最初に造波した波のエネルギーに時刻 t_b 、位置 x_b において到達する解析的条件を与える。

造波する波の位相は式(1)で与えられる角周波数を時間について積分することで与える。一般的な波動論では

角周波数は時刻に対して一定であるため、位相は角周波数と時刻の積によって与えられる。しかし本理論で用いる浅水包絡波集中理論では、角周波数が時間変化するため位相の定義である積分形を用いる。 g は重力加速度、 t は時刻、 k は波数、 h は水深を表す。

$$\sigma(t) = \frac{g}{4}(t_b - t) \left\{ \int_0^{x_b} \frac{(\cosh kh)^2}{2kh + \sinh 2kh} dx \right\}^{-1} \quad (1)$$

$$\theta(t) = - \int_0^t \sigma(t) dt \quad (2)$$

位相 θ は波速 C によって移流することから位相の支配方程式は式(3)となる。波数 k は位相 θ の空間微分によって更新を行い、角周波数 σ は分散関係式より求める。

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + C \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0 \quad (3)$$

得られた波数 k 、角周波数 σ より計算領域各地点における群速度 C_g を算出し、式(4)の Schrödinger 方程式を計算する。ここで E は包絡波のエネルギー、 i は虚数単位を表す。式(5)は角周波数 σ を波数 k で二回微分したものである。

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial (C_g E)}{\partial x} = \frac{i}{2} \sigma'' \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} \quad (4)$$

$$\sigma'' = - \frac{g}{4\sigma k T} \{ T^2 - 2khT(1 - T^2) + (kh)^2(1 - T^2)^2 \} \quad (5)$$

$$T = \tanh kh \quad (6)$$

式(3)は CIP 法により計算を行う。また式(4)には二段階分離解法を適用し、左辺=0 からなる保存則を表す式には Nussyahu、Tadmor らによるスキーム(式(7))を用いる。図1から角周波数 σ は0に近づくと急激な変化をする。このような急激な変化を数値的にとらえて計算することに適したスキームを用いる。右辺は差分法により解く。

$$v_j(t + \Delta t) = \frac{1}{2} [v_j(t) + v_{j+1}(t)] + \frac{1}{8} [v'_j - v'_{j+1}] - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[f \left(v_{j+1} \left(t + \frac{\Delta t}{2} \right) \right) - f \left(v_j \left(t + \frac{\Delta t}{2} \right) \right) \right] \quad (7)$$

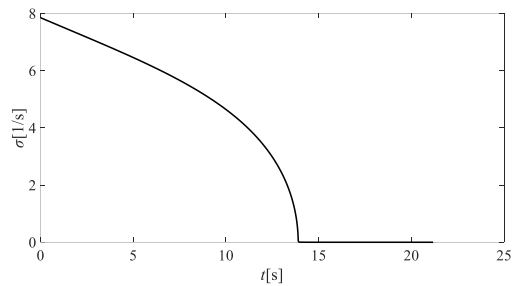


図 1.角周波数の時間変化

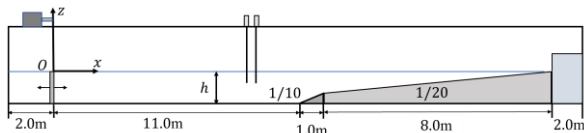


図 2.造波水槽

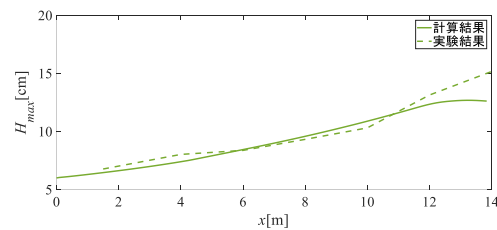
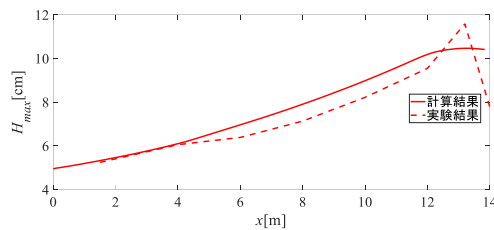
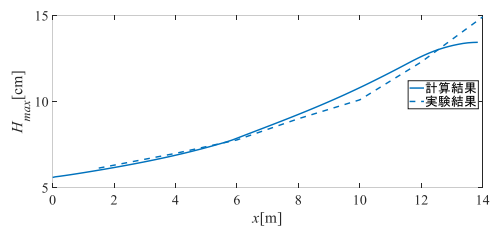


図 3.包絡波の最大波高

上: case1 中: case2 下: case3

計算グリッドにはスタガード格子を用いる。計算は図 2 のような異なる二つの勾配からなるスロープを底面とする造波水槽を模擬した計算領域で行う。

3.実験方法

Schrödinger 方程式による包絡波高予測を検証するために波浪実験を行った。実験は長さ 24m、幅 0.6m、高さ 0.8m、1/20 の海底勾配(法先 1/10)をもつピストン式造波水槽で行われた。水位変動は 4~14m 区間において 2m 間隔で容量式波高計によって測定された。式(2)の位相を持つ波の入力信号を造波機に送ることで集中包絡波を

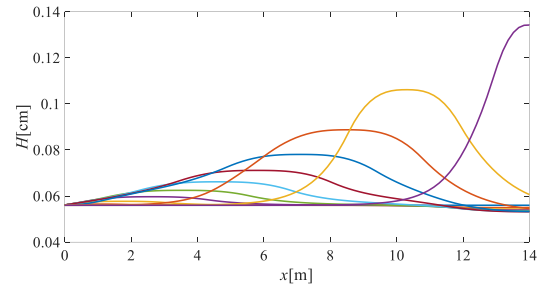


図 4.包絡波の波高分布

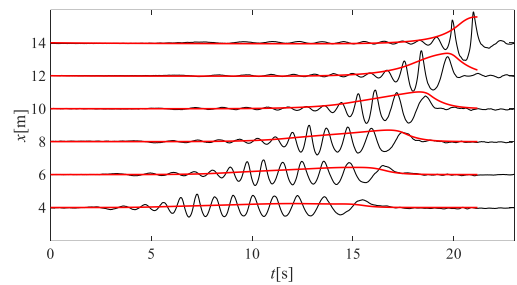


図 5.包絡波の特性曲線

生成した。実験ケースは初期周期 0.8s、focus 位置 $x_b = 14m$ の条件に対し、水深 30、40、50cm の全 3 ケースについて行い、数値計算結果と比較を行った。

4.結果

図 3 は造波水槽に沿った各地点において計測された最大振幅を実験結果と数値計算結果を比較したものである。3 ケースそれぞれについておおむね包絡波高を数値的に予測できている。しかし包絡波の集中設定地点である $x_b = 14m$ 付近において実験結果と計算結果で差が生じていることが分かる。

図 4 は case1 の波高分布であり、包絡波の伝達を表している。包絡波が伝搬するにつれて波高が増大していき、包絡波高が減少していく包絡波の集中の様子が数値的に再現されている。

図 5 は造波水槽に沿った各地点で計測された水位の時間変化を計測した地点について縦軸方向に並べた包絡波の特性曲線である。この図からも包絡波が減少し、波高が増大していく様子が数値的に再現できていることがわかる。

5.まとめ

本研究では Schrödinger 方程式により包絡集中波の発達を数値的に計算し、造波水槽における波浪実験と比較を行った。包絡波が伝搬するにつれて波高が増大し、波長が減少する過程を数値的に良好に再現することができた。しかし波のエネルギーの集中地点付近において波高の計算結果と実験結果で差が大きくなる。これは波高が増大していくことで波と波同士の非線形干渉による作用が大きくなり、本計算では考慮していない影響因子が働いていると考えられる。今後は非線形作用を始めとした包絡波の発達に影響を及ぼす効果を考慮した計算を行い、さらなる精度の向上を目指していきたい。

参考文献

- [1] Yasunori Watanabe et.al Wave Packet Focusing in Shallow Water, Coastal Engineering journal 投稿中
- [2] M.S. Longuet-Higgins, Breaking waves-in deep or shallow water, *Tenth Symposium on Naval hydrodynamics* ACR-204(1974) 597-605
- [3] H.Nessyahu and E.Tadmor,Non-oscillatory central differencing for hyperbolic conservation laws *J,Comput.Phys.***87**,408(1990)