

気液界面流れに対する高次 Sharp Interface モデルの提案

A high order sharp interface model for gas-liquid multiphase flow

北海道大学工学部環境社会工学科 学生員 土屋裕嵩 (Hiroataka Tsuchiya)
北海道大学大学院教授工学研究院 正会員 渡部靖憲 (Yasunori Watanabe)

1. はじめに

静水上に風が吹く時、ランダムな指向性を持つ表面張力波が初期に発生し、徐々に増幅する重力波の前面に寄生毛管波を伴いながら (Longuet-Higgins, 1992) 支配周波数が低下する独特の遷移的過程を経て風波は発達する (Hatori, 1984). この不安定な初期波の発生、発達は Phillips (1957) や Miles (1957) によって理論的な説明が試みられた一方、いまだにそのメカニズムが証明されていない。微細な不安定性水面変動に応じた風境界層の変化を物理的に計測することは困難であり、また数値的に再現することも容易ではない。気液二相流計算で広く用いられている Continuum Surface Force モデル (Brackbill et al. 1992) や phase field モデル (門脇・渡部, 2018) は diffuse interface の導入により安定して気液界面の流れを計算できる一方、物理的に生じる界面の不安定挙動を滑らかに拡散させてしまう可能性があり、初期波発生への適応は適当でない。気液界面上の境界条件を基に気液相を別々に解く Sharp interface モデルが近年提案されてきたが (Frederic Gibou et al. 2007, M. Sussman et al. 2007) 一部に拡散界面が導入されているものが殆どであり、完全に不連続界面を定義する Sharp interface モデルは未開発である。Watanabe et al (2008) はゼロ接線方向せん断力の条件を自由水面に課す液体単相流に対する Sharp interface モデルを提案し、水面-渦相互作用を経て不安定水面が発達するフィンガージェット (Saruwatari et al. 2009) や碎波下の 3 次元組織渦構造 (Otsuka, 2017) の再現に成功している。

本研究は Watanabe et al. の自由水面に対する Sharp interface モデルを気液二相流界面問題へ拡張し、与えられた界面上のせん断力に駆動される初期波および気液の変化から長く未解明であった。風波の発生メカニズムを提示することを最終目的とするものである。本稿では、提案モデルを解説し、その妥当性を議論する。

2. 数値計算法

(1) 支配方程式

本研究では、Watanabe et al. (2008) と同様に、フィルター操作されたナビエ・ストークス方程式を支配方程式とした 3 次元 Large Eddy Simulation を行う。気液混相流において液体、気体の運動は後に説明する境界条件の元、次の式により数値的に解く。

$$\frac{Du^l}{Dt} = -\nabla \frac{p^l}{\rho^l} + \nu^l \nabla^2 u^l - \nabla \cdot \tau^l - g^l \quad (1)$$

$$\frac{Du^g}{Dt} = -\nabla \frac{p^g}{\rho^g} + \nu^g \nabla^2 u^g - \nabla \cdot \tau^g \quad (2)$$

ここで、 u^l は液体の流速、 p^l は液体の圧力、 ν^l は液体の動粘性係数、 ρ^l は液体の密度、 τ^l は液体のサブグリッド応力、 g^l は重力加速度、 u^g は気体の流速、 p^g は気体の圧力、 ν^g は気体の動粘性係数、 ρ^g は気体の密度、 τ^g は気体のサブグリッド応力である。本稿では、界面境界条件の設定法の提案にフォーカスしており、上式の計算方法の詳細は割愛する。(Watanabe et al. 2009 を参照されたい)

(2) 境界条件

気液の境界面では、両相の接線方向せん断力が等しくなるというはずであり、この境界条件は次式で表される。

$$\mu^l \left(\frac{\partial u_n^l}{\partial s} \Big|_s + \frac{\partial u_s^l}{\partial n} \Big|_s \right) = \mu^g \left(\frac{\partial u_n^g}{\partial s} \Big|_s + \frac{\partial u_s^g}{\partial n} \Big|_s \right) \quad (3)$$

$$\mu^l \left(\frac{\partial u_t^l}{\partial t} \Big|_s + \frac{\partial u_t^l}{\partial n} \Big|_s \right) = \mu^g \left(\frac{\partial u_t^g}{\partial t} \Big|_s + \frac{\partial u_t^g}{\partial n} \Big|_s \right) \quad (4)$$

ここで、 n は境界面に対する法線方向、 s, t は境界面に対する接線方向を表しており、 u_n, u_s, u_t はそれぞれ n, s, t 方向の速度を表している。また、境界面での n 方向流速の s 方向勾配は、次のように変形できる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_n}{\partial s} \Big|_s &= \frac{\partial u}{\partial s} \cdot n \Big|_s = \frac{\partial u}{\partial s} n_x + \frac{\partial u}{\partial s} n_y + \frac{\partial u}{\partial s} n_z \Big|_s \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} s_x + \frac{\partial u}{\partial y} s_y + \frac{\partial u}{\partial z} s_z \right) n_x \\ &\quad + \left(\frac{\partial v}{\partial x} s_x + \frac{\partial v}{\partial y} s_y + \frac{\partial v}{\partial z} s_z \right) n_y \\ &\quad + \left(\frac{\partial w}{\partial x} s_x + \frac{\partial w}{\partial y} s_y + \frac{\partial w}{\partial z} s_z \right) n_z \\ &= \sum \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \Big|_s s_j n_i \end{aligned} \quad (5)$$

同様に、

$$\frac{\partial u_s}{\partial n} \Big|_s = \sum \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \Big|_s s_i n_j \quad (6)$$

よって (5), (6) 式により (3) 式は次のように書き換えられる。

$$\begin{aligned} \mu^l \left(\sum \frac{\partial u_i^l}{\partial x_j} \Big|_s s_j n_i + \sum \frac{\partial u_i^l}{\partial x_j} \Big|_s s_i n_j \right) \\ = \mu^g \left(\sum \frac{\partial u_i^g}{\partial x_j} \Big|_s s_j n_i + \sum \frac{\partial u_i^g}{\partial x_j} \Big|_s s_i n_j \right) \end{aligned} \quad (7)$$

(3) 速度の外挿計算

グリッド上の速度をそれぞれの位置で離散的に求める場合、隣り合うグリッドの速度を用いて速度の計算を近似的に行う。しかし別の相と隣り合う境界面近傍のグリッドの速度を求めるとき、求めたい速度の位置する相と別の相の速度の値を用いてしまうと、境界面での気液の速度差に

影響を受け、計算結果が実際の速度の値と異なる値を与えてしまう。このため、速度を求めたい点の相の速度を、接線方向せん断力のバランス条件(3), (4)を基に物理的に矛盾なく別の相に外挿する必要がある。

はじめに、任意のグリッド上での流速勾配は、次式のように境界面上の流速勾配と未定乗数 $a_{ij}^l, b_{ij}^l, c_{ij}^l$ に対する一次結合で表せると仮定する。

$$\frac{\partial u_i^l}{\partial x_j} = \frac{\partial u_i^l}{\partial x_j} \Big|_s + a_{ij}^l x^l + b_{ij}^l y^l + c_{ij}^l z^l \quad (8)$$

ここで、 $i, j = 1, 2, 3$ である。

(8)式を(7)式に代入し、整理することにより次式が得られる。

$$\begin{aligned} & \sum \{ \mu^l (a_{ij}^l x^l + b_{ij}^l y^l + c_{ij}^l z^l) \\ & - \mu^g (a_{ij}^g x^g + b_{ij}^g y^g + c_{ij}^g z^g) \} (s_j n_i + s_i n_j) \\ & = \sum \left(\mu^l \frac{\partial u_i^l}{\partial x_j} - \mu^g \frac{\partial u_i^g}{\partial x_j} \right) (s_j n_i + s_i n_j) \quad (9) \end{aligned}$$

(9)式を解き未知数 $a_{ij}^l, b_{ij}^l, c_{ij}^l$ を求め、(8)式に代入することにより境界面上の流速勾配が求められる。また、求めた値を次式に代入することにより、液体の速度が気体のグリッドに外挿される。

$$u_i^l = u_i^l \Big|_s + \frac{\partial u_i^l}{\partial x_j} \Big|_s x_j^l \quad (10)$$

界面近傍の N 個グリッド上の流速勾配ならびに海面からの距離 (x, y, z) から、最小自乗法によって式(8)及び(10)から流速が二次精度で近似可能なことがわかる。

これらの計算を気体の相にも同様に行うことにより、気体の速度も液体のグリッドに外挿することができる。

3. 外挿計算の結果

(1) 平行流

ナビエ・ストークス方程式から、気体の流速分布と液体の流速分布を次式のように仮定した。

$$u_l = \frac{\alpha}{2\mu_l} z^2 - \frac{\alpha}{\mu_l} h_1 z + u_1 \quad (11)$$

$$u_g = \frac{\beta}{2\mu_g} z^2 - \left(\frac{\beta}{\mu_g} h_2 + \frac{u_2}{h_2} \right) z + u_2 \quad (12)$$

ここで、 μ_l, μ_g はそれぞれ液体と気体の粘性係数、 u_1, u_2 はそれぞれ液体と気体の境界面での流速を表している。

液体速度の外挿計算は青実線の流速分布のみから計算され、気体速度の外挿計算は緑実線の流速分布のみから計算される。

図1は各相への入力流速(実線)と近似流速(赤線)の鉛直分布を表している。図1から、外挿された速度分布が本来の速度分布に沿って外挿されており、本提案モデルの妥当性が示された。

(2) 微小振幅波

図2のような波形の微小振幅波で液体の流速分布に対して外挿計算を行った。この時、 x 方向の流速 u と z 方向の流速 w はそれぞれ次式(13), (14)のように与えられた。

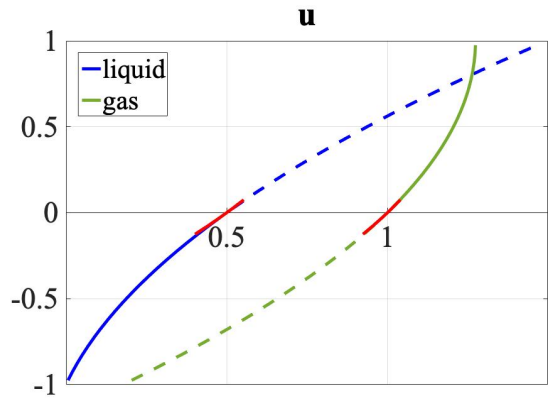


図1, (11), (12)式の流速勾配の時の外挿計算。赤線は外挿された速度分布。 $u_1 = 0.5 \text{ m/s}, u_2 = 1.0 \text{ m/s}$

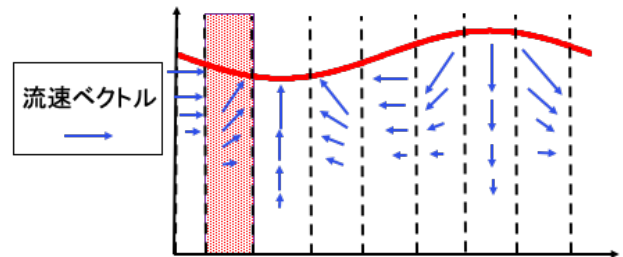


図2. 微小振幅波の波形。赤線は気液境界面、赤い領域は $x=L/8$ 地点での流速ベクトルを表す。波長 $L=24.7 \text{ m}$

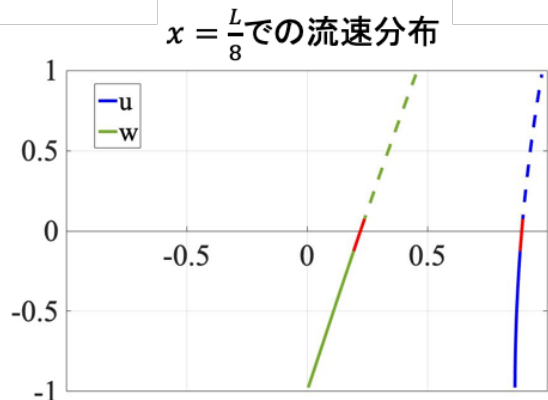


図3. 微小振幅波での流速分布の外挿計算結果。
($x = L/8$)

$$u = \frac{H}{2} \sigma \frac{\cosh k(h+z)}{\sinh kh} \cos(kx - \sigma t) \quad (13)$$

$$w = \frac{H}{2} \sigma \frac{\sinh k(h+z)}{\sinh kh} \sin(kx - \sigma t) \quad (14)$$

ここで、振幅 $H = 0.1 \text{ m}$ 、水深 $h = 1.0 \text{ m}$ 、周期 $T = 1.0 \text{ s}$ 、 $\sigma = 2\pi/T (1/s)$ 、 $k = 2\pi/L (1/m)$ 、 $t = 0 \text{ s}$ である。この外挿計算の結果は図3, 4, 5, 6のように水平、鉛直流速共に水面の液体流速分布と矛盾しない。これにより、微小振幅波での流速分布においても本研究での外挿計算の妥当性を与えることができた。

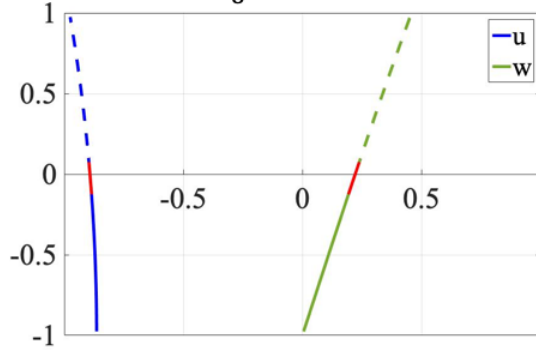
$x = \frac{3L}{8}$ での流速分布

図 4. 微小振幅波での流速分布の外挿計算結果.

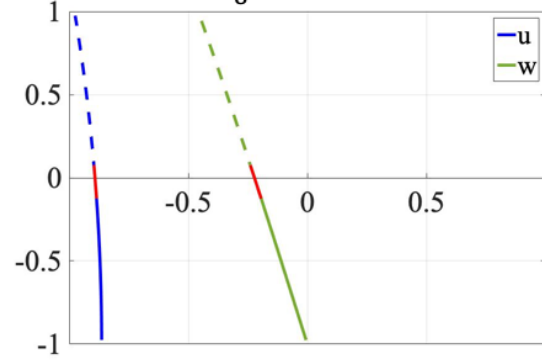
 $(x = 3L/8)$ $x = \frac{5L}{8}$ での流速分布

図 5. 微小振幅波での流速分布の外挿計算結果.

 $(x = 5L/8)$

4. 結論

本稿では流速の外挿計算を平行流と微小振幅波の2つの場合で行い、それらの外挿計算結果が本来の流速分布と矛盾のない値を与えていることを確認した。これまでの計算結果を元に運動方程式を解くことにより、タイムステップ毎に気液境界面が変化するモデルとなる。また、液体の流速と気体の流速は互いの影響を受け変化するような計算を行う。

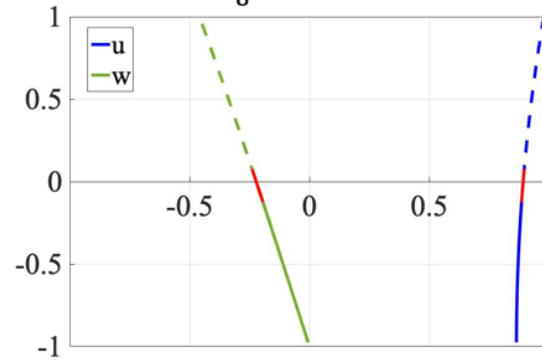
 $x = \frac{7L}{8}$ での流速分布

図 6. 微小振幅波での流速分布の外挿計算結果.

 $(x = 7L/8)$

参考文献

- 1) Watanabe, Y, Saruwatari, A, D. M. Ingram: Free surface flows under impacting droplets. (2008)
- 2) Watanabe, Y, Saruwatari, A, D. M. Ingram : Scarifying and fingering surfaces of plunging jets. (2009)
- 3) Otsuka, J, Watanabe, Y, Saruwatari, A, : Vortex-induced suspension of sediment in the surf zone. (2017)