Layer-wise 理論ならびに改良 ZIG-ZAG 理論による異方性積層板の曲げ解析

Bending analysis of anisotropic laminated plates by using layer-wise theory and improved ZIG-ZAG theory

函館工業高等専門学校　正　　員　渡辺　力　(Chikara WATANABE)
函館工業高等専門学校　学生会員　佐野　凌希 (Ryoki SANO)

1.　まえがき

繊維強化プラスチック（FRP）などの異方性積層板では，板厚比が大きくなると ZIG-ZAG 変位の影響が大きく現れる．この ZIG-ZAG 変位の影響を効果的に変位場に組み入れるために改良 ZIG-ZAG 理論が開発されている [1)]．

一方，ZIG-ZAG 理論とは別に，Reddy らによって Layer-wise 理論が開発されている [2)]．この Layer-wise 理論では，ZIG-ZAG 理論などの平板理論とは自由度の取り扱いが大きく異なる．三次元弾性理論による異方性積層板の計算と同様に各層境界に自由度を設けて，それを線形補間する．さらに，層内部にも自由度を設けて，高次補間する変位場を用いる．

しかしながら，Layer-wise 理論は主として有限要素法に用いられる理論であるので，Layer-wise 理論自体の精度や効率性を詳細に示した研究は見当たらない．本研究は，改良 ZIG-ZAG 理論と Layer-wise 理論の精度と効率性を比較し，両理論の得失を明らかにすることを目的としている．

Layer-wise 理論に用いられる補間関数として，Reddy らは Lagrange 多項式を用いている [2)]．本研究では，定式化を容易にするために境界条件を満たす最も単純な多項式であるハイアラーキ多項式 [3)] を用いて，異方性積層板の曲げ解析を級数解法により定式化する．本報告では対称 3 層，逆対称 4 層積層板に Layer-wise 理論と改良 ZIG-ZAG 理論を用いて，精度と効率性を比較した結果について報告する．

2.　改良 ZIG-ZAG 理論

図－1 に改良 ZIG-ZAG 理論に用いられる変位場の概念を示す．ZIG-ZAG 理論では，厚板理論の変位場に ZIG-ZAG 項を付加して，ZIG-ZAG 分布となる変位を効果的に表現する．三次せん断変形理論に基づく ZIG-ZAG 理論では次の変位場を用いる（モデル ZZ33W）．

$$\left.\begin{aligned} u^{(k)} &= u_0 + z\,u_1 + z^2 u_2 + z^3 u_3 + \phi_u^{(k)}\psi_u \\ v^{(k)} &= v_0 + z\,v_1 + z^2 v_2 + z^3 v_3 + \phi_v^{(k)}\psi_v \\ w^{(k)} &= w_0 + z\,w_1 + z^2 w_2 + z^3 w_3 + \phi_w^{(k)}\psi_w \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

ここに，u_i, v_i, w_i は中央面（z=0）における変位成分で，ψ_u, ψ_v, ψ_w が ZIG-ZAG 変位である．また，$\phi_u^{(k)}$, $\phi_v^{(k)}, \phi_w^{(k)}$ は ZIG-ZAG 変位の板厚方向の分布を表す ZIG-ZAG 関数であり，改良 ZIG-ZAG 理論では次の関数を用いる．

$$\begin{aligned} \phi_u^{(k)} &= \beta_u^{(k)} z + a_u^{(k)}, \qquad \phi_v^{(k)} = \beta_v^{(k)} z + a_v^{(k)} \\ \phi_w^{(k)} &= \beta_w^{(k)} z + a_w^{(k)} \end{aligned} \quad (2)$$

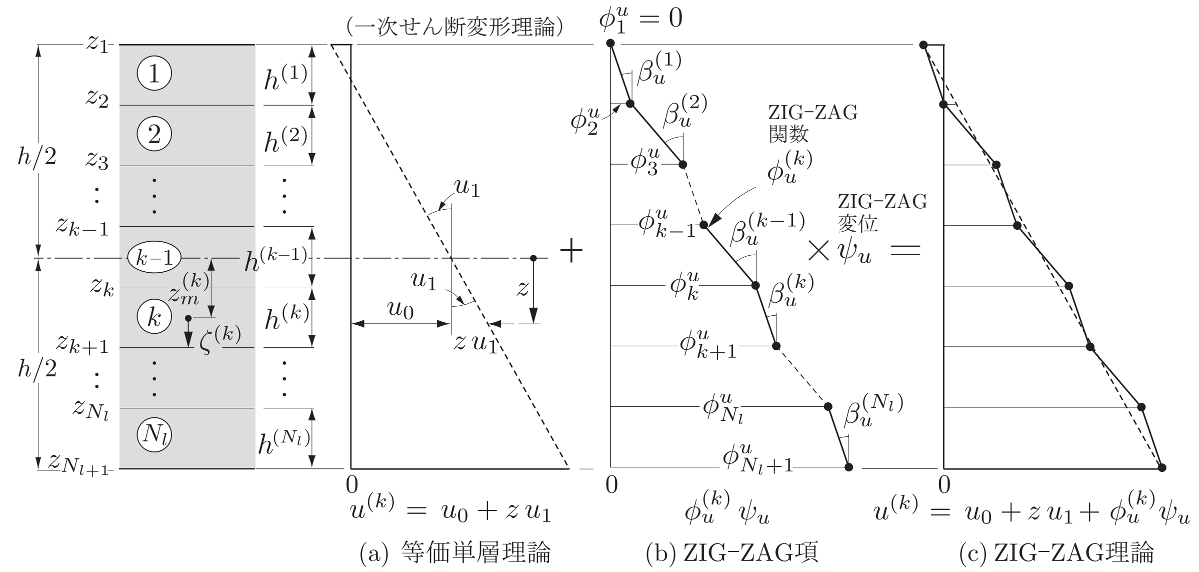
式 (2) の $\beta_u^{(k)}$, $\beta_v^{(k)}$, $\beta_w^{(k)}$ は，第 k 層の ZIG-ZAG 関数の勾配を表す．まず，面内変位 u, v の ZIG-ZAG 関数の勾配 $\beta_u^{(k)}, \beta_v^{(k)}$ は，面外せん断弾性定数 $\overline{Q}_{55}^{(k)}, \overline{Q}_{44}^{(k)}$ の板厚方向の分布に応じて定めるが．面外せん断弾性定数が全層同じ場合には等価単層理論のせん断応力との整合性を保つための補正を行っている．次に，面内変位 w の ZIG-ZAG 関数の勾配 $\beta_w^{(k)}$ は，$\beta_u^{(k)}$ と $\beta_v^{(k)}$ の組み合わせに応じて，三次元弾性理論の応力の平衡方程式を満足するように定めている [1)]．

また，ZIG-ZAG 理論では層境界の変位の連続性は満足されるが，面外応力の 3 成分に関する層境界での連続性と境界条件は満足されない．そのため改良 ZIG-ZAG 理論では，面外応力を三次元弾性理論の応力の平衡方程式から計算した改良面外応力 $\tau_{xz}^*, \tau_{yz}^*, \sigma_z^*$ を用いる [1)]．

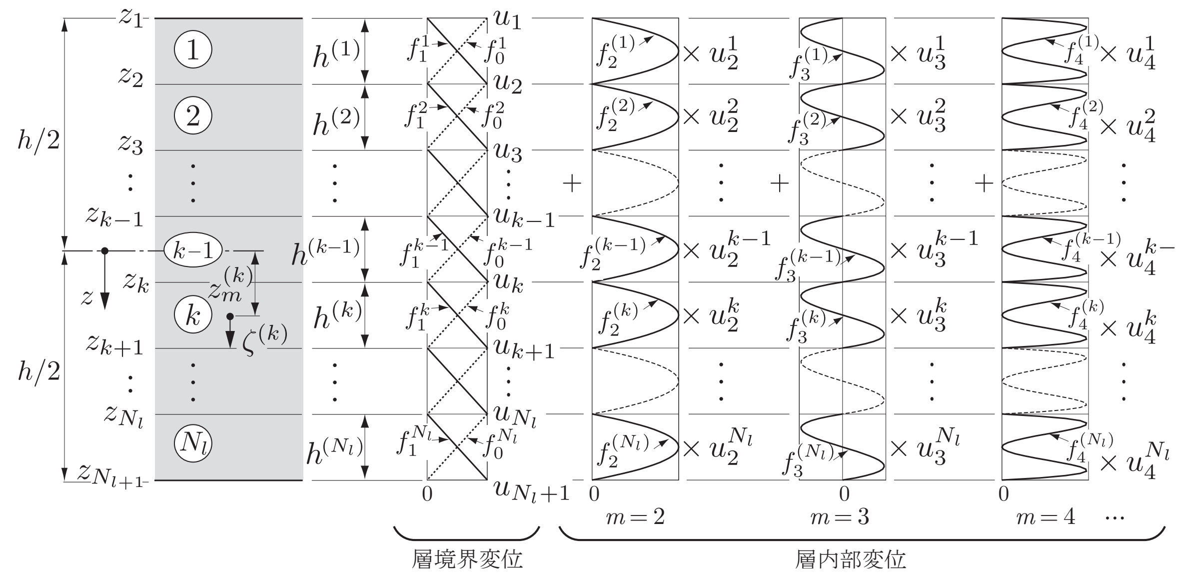
3.　Layer-wise 理論

図－2 に Layer-wise 理論に用いられる変位場の概念を示す．Layer-wise 理論の変位場では，ZIG-ZAG 理論などの平板理論と自由度の取り扱いが大きく異なる．三次元弾性理論による異方性積層板の計算と同様に各層境界に自由度を設けて，それを線形補間する．さらに，層内部にも自由度を設けて，高次補間する変位場を用いる．本研究では，第 k 層の変位を次式で表す．

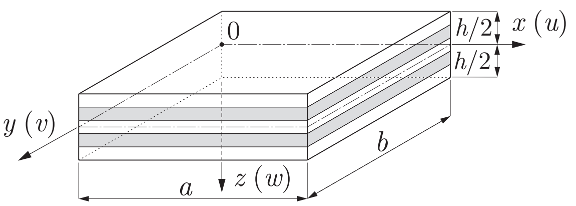
$$\left.\begin{aligned} u^{(k)} &= f_0^{(k)} u_k + f_1^{(k)} u_{k+1} + \sum_{m=2}^{p_u} f_m^{(k)} u_m^k \\ v^{(k)} &= f_0^{(k)} v_k + f_1^{(k)} v_{k+1} + \sum_{m=2}^{p_v} f_m^{(k)} v_m^k \\ w^{(k)} &= f_0^{(k)} w_k + f_1^{(k)} w_{k+1} + \sum_{m=2}^{p_w} f_m^{(k)} w_m^k \end{aligned}\right\} \quad (3)$$



図–1 改良 ZIG-ZAG 理論の概念



図–2 Layer-wise 理論の概念



図–3 異方性積層板

ここに，右辺の第 1 項と第 2 項は層境界変位の項で，第 3 項が層内部変位の項である．m は板厚方向 (z 方向) の多項式の次数を表し，p_u, p_v, p_w は各変位成分の展開次数を表す．また，変位 u_k, u_{k+1} は図－**2** に示す層境界 $k, k+1$ の層境界変位で，u_m^k は第 k 層目の次数 m に対応する内部変位である．補間関数 $f_m^{(k)}$ には，Reddy は Lagrange 多項式を用いているが [2]，本研究では次のハイアラーキ多項式 [3] を用いる．

$$\left.\begin{aligned} &f_0^{(k)} = \tfrac{1}{2}(1-\zeta^{(k)}), \quad f_1^{(k)} = \tfrac{1}{2}(1+\zeta^{(k)}) \\ &f_m^{(k)} = (1-\zeta^{(k)2})\,\zeta^{(k)m-2} \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

4. 数値計算例

4.1 計算モデル

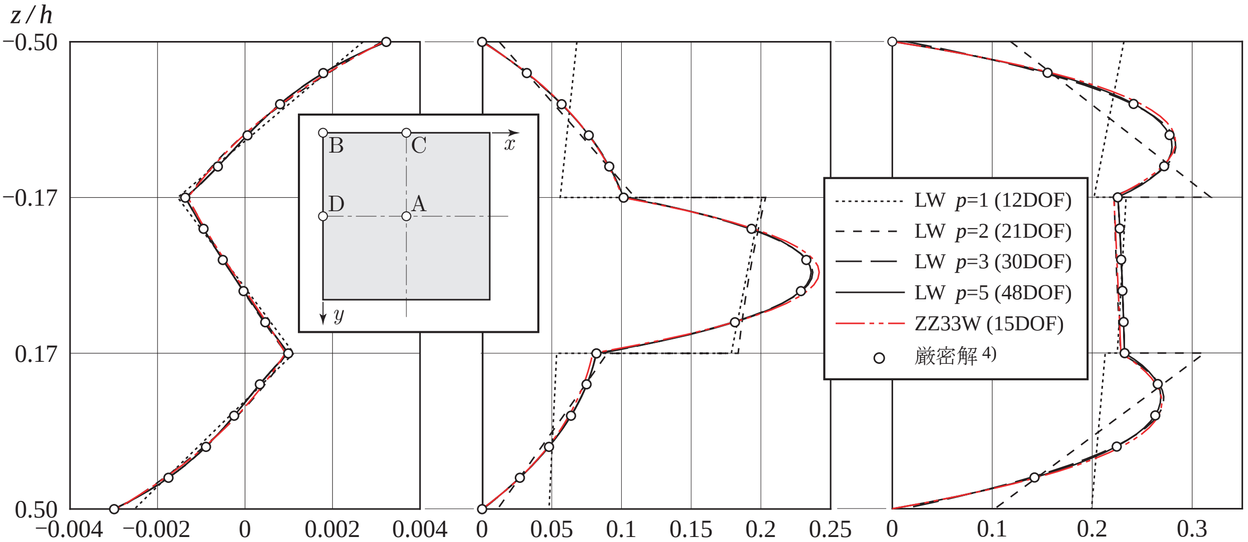
計算モデルは，**図–3** に示す長さ a，幅 b，板厚 h の周辺単純支持された直交積層板であり，形状比を a/b=1，板厚比を b/h=3/10 とする．繊維配向は，対称 3 層 [0/90°/0]，逆対称 4 層 [0/90°/0/90°] の 2 ケースを計算する．直交積層板の材料定数には次の値を用いる．

$$E_1/E_2 = 25, \quad E_3 = E_2, \quad G_{12} = G_{13} = 0.5E_2$$
$$G_{23} = 0.2E_2, \quad \nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{23} = 0.25$$

荷重は，板上縁に正弦荷重 (q=$q_0 \sin\frac{\pi x}{a} \sin\frac{\pi y}{b}$) を作用させ，変位と応力の計算値は次式を用いて無次元化

表–1　対称 3 層積層板 [0/90°/0] の変位と応力の誤差（$h/b = 3/10$）(%)

次数 p	u	v	w	σ_x	σ_y	τ_{xy}	τ_{yz}	τ_{xz}	DOF
1	-16.37	-6.44	-4.04	-15.57	-8.12	-9.33	-19.55	-0.07	12
2	-3.08	-1.94	-1.28	-2.80	-3.50	-2.27	-18.72	-2.25	21
3	-3.73×10^{-2}	-8.89×10^{-3}	-7.17×10^{-3}	2.81×10^{-2}	6.95×10^{-2}	-1.72×10^{-2}	5.02×10^{-1}	1.09×10^{-2}	30
4	-1.89×10^{-3}	-1.16×10^{-3}	-7.82×10^{-4}	2.46×10^{-3}	-1.97×10^{-3}	-1.37×10^{-3}	5.04×10^{-1}	9.03×10^{-3}	39
5	-8.21×10^{-6}	-1.77×10^{-6}	-1.50×10^{-6}	1.11×10^{-3}	1.60×10^{-3}	-3.64×10^{-6}	-5.29×10^{-3}	-9.15×10^{-5}	48
ZZ33W	-1.85	-1.14	-0.91	-1.39	-2.55	-1.35	2.44	-1.88	15
厳密解 [4]	3.228569 ($\widetilde{u}\times1000$)	7.865130 ($\widetilde{v}\times1000$)	2.789550 ($\widetilde{w}\times100$)	-8.961937 ($\widetilde{\sigma}_x\times10$)	-5.860276 ($\widetilde{\sigma}_y\times10$)	5.808647 ($\widetilde{\tau}_{xy}\times100$)	2.358391 ($\widetilde{\tau}^*_{yz}\times10$)	2.296458 ($\widetilde{\tau}^*_{xz}\times10$)	–
観測点	D, $z=-h/2$	C, $z=-h/2$	A, $z=-h/2$	A, $z=-h/2$	A, 2 層目上縁	B, $z=-h/2$	C, $z=0$	D, $z=0$	



(a) 面内変位 $\widetilde{u}$（D点）　(b) 面外せん断応力 $\widetilde{\tau}_{yz}$（C点）　(c) 面外せん断応力 $\widetilde{\tau}_{xz}$（D点）

図–4　対称 3 層積層板 [0/90°/0] の変位と面外せん断応力の分布

して表す．

$$\widetilde{u} = \frac{uE_2h^3}{q_0b^4},\quad \widetilde{v} = \frac{vE_2h^3}{q_0b^4},\quad \widetilde{w} = \frac{wE_2h^3}{q_0b^4}$$
$$\widetilde{\sigma}_x = \frac{\sigma_x h^2}{q_0b^2},\quad \widetilde{\sigma}_y = \frac{\sigma_y h^2}{q_0b^2},\quad \widetilde{\sigma}_z = \frac{\sigma_z}{q_0}$$
$$\widetilde{\tau}_{xy} = \frac{\tau_{xy}h^2}{q_0b^2},\quad \widetilde{\tau}_{yz} = \frac{\tau_{yz}h}{q_0b},\quad \widetilde{\tau}_{xz} = \frac{\tau_{xz}h}{q_0b} \qquad (5)$$

4.2　対称 3 層積層板 [0/90°/0]

表–1 には，Layer-wise 理論と改良 ZIG-ZAG 理論による対称 3 層積層板の変位と応力の最大値の厳密解 [4] に対する誤差（%），未知自由度数（DOF）を示している．Layer-wise 理論では式 (3) の展開次数を変位の 3 成分で同じ p とし．p=1∼5 に採っている．改良 ZIG-ZAG 理論では式 (1) の変位場を用いる三次せん断変形理論理論型 ZZ33W の結果を示しており，面外応力は三次せん断変形理論の平衡方程式から計算した改良面外応力である．また，変位 u と面外せん断応力 τ_{yz}, τ_{xz} の板厚方向の分布を**図–4** に示す．

表–1 より，Layer-wise 理論では，次数 p を増やすと精度が大きく改善される．p=2 では面外せん断応力の誤差が 18%と大きいが，p=3 に採れば変位と応力の誤差は 1%以下となり，p=5 を用いれば 10^{-3}∼10^{-6}%と極めて高精度の値が得れている．その一方で，次数 p を増やすと未知自由度数（DOF）も大きくなり，p=5 では 48 と未知数が極めて多くなっている．

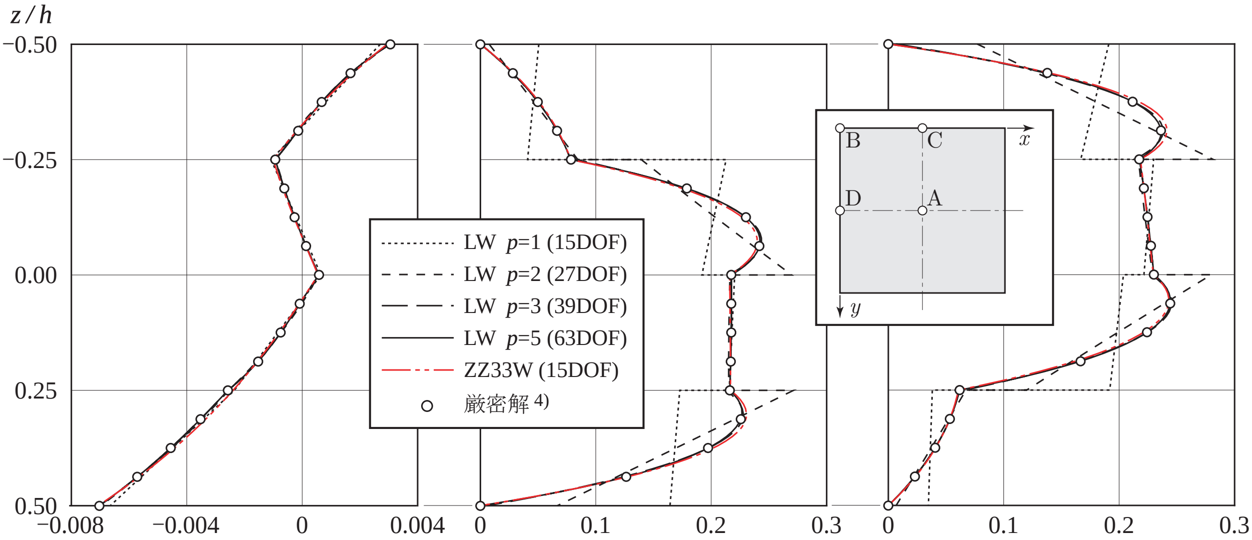
また，**図–1** から分かるように，改良 ZIG-ZAG 理論と同様に，Layer-wise 理論でも層境界の変位の連続性は満足されるが，面外応力の 3 成分に関する層境界での連続性と境界条件は満足されない．面外せん断応力は，p=2 では層境界で不連続となり境界条件も満たしていないが，p を 3 以上に採れば層境界での連続性と境界条件をほぼ満たす解が得られている．

それに対して，改良 ZIG-ZAG 理論 ZZ33W では変位と応力の誤差は 1∼2%程度となっており，面外応力は三次せん断変形理論の平衡方程式から計算した改良面外応力であるので，連続性と境界条件は完全に満足されている．精度を Layer-wise 理論と比較すると，p=2 と p=3 の中間程度の誤差となっている．

また，改良 ZIG-ZAG 理論 ZZ33W の未知自由度数は，式 (1) から分かるように，等価単層理論の未知数 12 に ZIG-ZAG 変位数 3 を加えた 15 となる．これらは層数が増えても 15 のままである．Layer-wise 理論 p=3 と比較すると未知自由度数は 1/2 となっている．

表–2　逆対称 4 層積層板 [0/90°/0/90°] の変位と応力の誤差（$h/b = 3/10$）(%)

次数 p	u	v	w	σ_x	σ_y	τ_{xy}	τ^*_{yz}	τ^*_{xz}	DOF
1	-11.38	-5.65	-2.91	-10.69	-10.19	-7.35	-5.17	-7.60	15
2	-1.15	-0.73	-0.48	-0.98	-1.05	-0.86	11.84	10.59	27
3	-9.25×10^{-3}	-3.80×10^{-3}	-2.10×10^{-3}	2.51×10^{-2}	2.39×10^{-2}	-5.41×10^{-3}	-5.69×10^{-1}	-5.41×10^{-1}	39
4	-2.32×10^{-4}	-1.45×10^{-4}	-9.76×10^{-5}	1.63×10^{-3}	1.27×10^{-3}	-1.71×10^{-4}	2.47×10^{-1}	2.22×10^{-1}	51
5	-6.74×10^{-7}	-2.70×10^{-7}	-1.50×10^{-7}	3.40×10^{-4}	3.49×10^{-4}	-3.90×10^{-7}	-7.16×10^{-3}	-6.58×10^{-3}	63
ZZ33W	-3.62	0.97	-0.94	-2.89	-7.68	-0.39	-0.60	-0.20	15
厳密解 4)	3.053017 ($\tilde{u}\times1000$)	7.251844 ($\tilde{v}\times1000$)	2.780261 ($\tilde{w}\times100$)	-8.485094 ($\tilde{\sigma}_x\times10$)	-6.582170 ($\tilde{\sigma}_y\times10$)	5.395613 ($\tilde{\tau}_{xy}\times100$)	2.173244 ($\tilde{\tau}^*_{yz}\times10$)	2.300846 ($\tilde{\tau}^*_{xz}\times10$)	–
観測点	D, $z=-h/2$	C, $z=-h/2$	A, $z=-h/2$	A, $z=-h/2$	A, 2 層目上縁	B, $z=-h/2$	C, $z=0$	D, $z=0$	



(a) 面内変位 $\tilde{u}$（D点）　(b) 面外せん断応力 $\tilde{\tau}_{yz}$（C点）　(c) 面外せん断応力 $\tilde{\tau}_{xz}$（D点）

図–5　逆対称 4 層積層板 [0/90°/0/90°] の変位と面外せん断応力の分布

4.3　逆対称 4 層積層板 [0/90°/0/90°]

逆対称 4 層積層板の結果を**表 – 2** と**図 – 5** に示す．これらは，**表 – 1** と**図 – 4** と同様にまとめたものであるが，**表 – 2** において，面外せん断応力の評価位置が板中央点となっており 4 層では層境界となることから，Layer-wise 理論の τ_{yz}, τ_{xz} は層境界の値の平均値を用いている．

傾向は **4.2** と同様であるが，Layer-wise 理論 p=2 では面外せん断応力の誤差が 10%を超えており，**表 – 2** の DOF と比較して，Layer-wise 理論では総数が多くなると未知数も多くなることが分かる．一方，改良 ZIG-ZAG 理論 ZZ33W では，垂直応力 σ_y の誤差が 7%程度と大きくなっているが，Layer-wise 理論 p=3 と比較すると未知自由度数は約 1/3 となっている．

5.　まとめ

改良 ZIG-ZAG 理論と Layer-wise 理論の精度と効率性を比較した．Layer-wise 理論は次数を高めると極めて高精度な解が得られるが，次数を高めたり，層数が増えると未知自由度数が極めて多くなる．一方，改良 ZIG-ZAG 理論の精度は Layer-wise 理論の $p = 2$ と $p = 3$ の中間程度の精度となるが，未知自由度数は層数が増えても一定で，Layer-wise 理論 $p = 3$ の未知自由度数に比べて 1/3~1/2 程度である．

なお，本研究では，改良 ZIG-ZAG 理論の適用性をさらに拡張するために，Layer-wise 理論と融合した新たな手法の開発を進めている．

謝辞：　本研究は JSPS 科研費 JP19K04586 の補助を受けた．ここに，記して感謝の意を表する．

参考文献

1) 渡辺　力：効果的な ZIG-ZAG 関数の開発と異方性積層板ならびに等方性平板の厚板解析への適用, 土木学会論文集 A2（応用力学）, Vol.74, No.1, pp.75-91, 2018.
2) Reddy,J.N.: *Mechanics of laminated composite plates and shells : theory and analysis*, second ed., CRC Press, 2004.
3) 渡辺　力, 林　正：変位場を規定するハイアラーキソリッド要素の厚板解析への適用, 土木学会論文集 A, Vol.66, No.4, pp.850-862, 2010.
4) Pagano, N. J. : Exact solutions for rectangular bidirectional composites and sandwich plates, *J. Compos. Mater.*, Vol.4, pp.20-34,1970.