

樹形の特徴を記述する質点系動力学モデルの適用性について

Applicability of spring-mass system model describing the characteristics of tree shapes

北海道大学工学部環境社会工学科
北海道大学大学院工学研究院
北海道大学大学院工学研究院
北海学園大学工学部
北海道大学電子科学研究所

○ 学生員 松井力也 (Rikiya Matsui)
正 員 佐藤太裕 (Motohiro Sato)
正 員 鄭好 (Hao Zheng)
正 員 小幡卓司 (Takashi Obata)
正 員 中垣俊之 (Toshiyuki Nakagaki)

1. まえがき

樹木の形態（樹形）は植物学的な機能とともに、その場の環境に適応し長期間にわたり倒壊することなく生育するために、力学的にも極めて合理的に形成されていると考えられる。例えば、静的には自重による応力発生を巧みに制御するとともに、風などの動的な外力作用に対しても、幹と枝葉の連成により効果的に振動を抑制していることが予想される。このことから、樹形の形態形成の仕組みを力学的に紐解くことにより、合理的な構造設計に対する知見が得られると考えた。

これらの背景をもとに、実際の樹木（ホオノキ）による予備的な振動実験を実施したところ、(i)連成1次振動数 P_1 が2次振動数 P_2 のおよそ2倍となること、(ii)枝を切り落とした幹の固有振動数は高く、枝葉の固有振動数はそれよりも低くなること、(iii)枝葉がついた幹の固有振動数は(ii)の幹、枝葉単独の固有振動数よりもさらに低下すること、(iv)枝葉全体の質量は幹の質量より若干小さい、などといった基本的性質を把握することができた。

本研究は、これらの樹木の基本特性について、解の性質を見通ししやすい2質点動力学モデルにより記述することを目的とし、その解析モデルの適用性について検証する。

2. 解析手法

2.1 解析モデル

図-1のように複数ある枝葉を集中質量 m_i ばね定数 k_i 減衰定数 c_i からなるばねモデルとみなし、それらをそれぞれ合成する。幹も同様にばねモデルとみなすことで図-2のように簡易的なモデルを構築した。本研究ではさらに幹の減衰定数 C_1 を0とみなして解析することとした。このモデルの減衰自由振動において、式(1)、式(2)を記述できるか検証した。

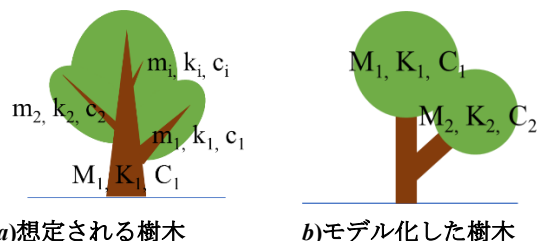


図-1 樹木のモデル化の考え方

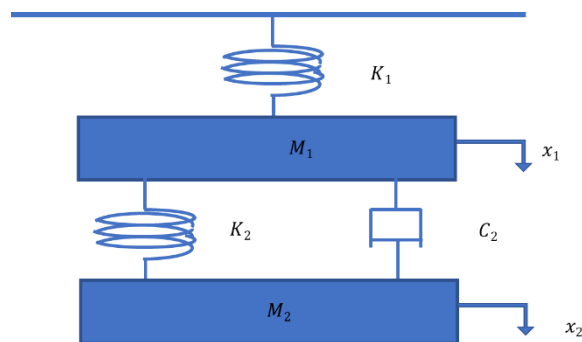


図-2 2質点系動力学モデル

2.2 固有振動数 p の求解

図-2より、運動方程式を行列表記して式(1)とする。

$$\begin{pmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_2 & -C_2 \\ -C_2 & C_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} K_1 + K_2 & -K_2 \\ -K_2 & K_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

ここで、 Ω_0 および m を式(2)のように定義する。

$$\Omega_0 = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{\sqrt{\frac{K_2}{M_2}}}{\sqrt{\frac{K_1}{M_1}}}, m = \frac{M_2}{M_1} \quad (2)$$

上式を用いると、基本的性質(ii)は $\Omega_0 < 1$ と、(iv)は $m < 1$ と表されることとなる。また、幹と枝の変位を式(3)のように仮定し、式(2)と式(3)を式(1)に代入すると式(4)が得られる。

$$x_1 = X_1 e^{pt}, x_2 = X_2 e^{pt} \quad (3)$$

$$\left\{ p^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 2h_2 \omega_1 \Omega_0 p \begin{pmatrix} m & -m \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \omega_1^2 \begin{pmatrix} 1 + m\Omega_0^2 & -m\Omega_0^2 \\ -\Omega_0^2 & \Omega_0^2 \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4)$$

式(4)の自明ではない解を得るために、式(5)の p に関する解を求めた。

$$\left| p^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 2h_2 \omega_1 \Omega_0 p \begin{pmatrix} m & -m \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \omega_1^2 \begin{pmatrix} 1 + m\Omega_0^2 & -m\Omega_0^2 \\ -\Omega_0^2 & \Omega_0^2 \end{pmatrix} \right| = 0 \quad (5)$$

2.3 解の評価

式(5)の解をそれぞれ p_1, p_2, p_3, p_4 とし、枝の振動数 ω_1 と減衰定数 h_2 を変数として、それぞれの解の虚部の絶対値 $|\text{Im}|$ の分布をたどった。図-3、図-4 に示す。 p_1, p_2 と p_3, p_4 でそれぞれ $|\text{Im}|$ が一致した。以後、固有振動数を $|\text{Im}[p_2]|, |\text{Im}[p_3]|$ と表記する。 $|\text{Im}[p_2]|$ は $h_2 < 1$ の分布がみられ、1 質点減衰自由振動と挙動が類似している。一方で、 $|\text{Im}[p_3]|$ は h_2 の値によらず分布がみられ、2 質点減衰自由振動固有の特徴といえる。また、両者とも ω_1 に比例して増加していることから、 ω_1 の一次関数と予測される。

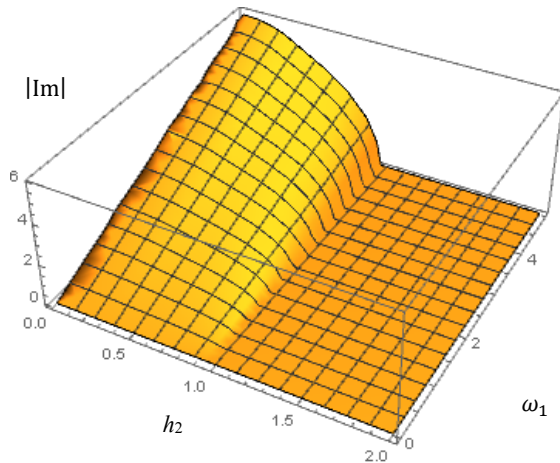


図-3 p_1, p_2 の虚部 $|\text{Im}[p_2]|$

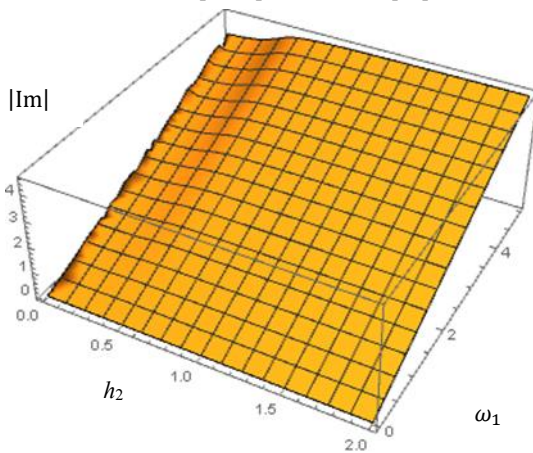


図-4 p_3, p_4 の虚部 $|\text{Im}[p_3]|$

2.4 固有振動数比 Ω の検討

Ω の定義を式(6)に示す。

$$\Omega = \begin{cases} \frac{|\text{Im}[p_2]|}{|\text{Im}[p_3]|} & (|\text{Im}[p_2]| > |\text{Im}[p_3]| \text{ のとき}) \\ \frac{|\text{Im}[p_3]|}{|\text{Im}[p_2]|} & (|\text{Im}[p_2]| < |\text{Im}[p_3]| \text{ のとき}) \end{cases} \quad (6)$$

各種パラメータは予備実験で得られた値に則り、 $h_2 = 0.03$ とし、 $m = 0.5, 1.0, 2.0$ と与えた時の Ω を Ω_0 についてプロットした。 Ω は下に凸の概形をとり、最小値 $\Omega_{\min}$ を持つ。また、 m の増加によって $\Omega_{\min}$ が増加し、そ

の時の Ω_0 は減少する傾向を持つことが分かった。 $\Omega_{\min}$ と Ω_0 の関係は、 $h_2 = 0.1$ へと増加させても大きな変化を示さなかった。変化のまとめを表-1 に示す。これらの結果から、基本的性質(ii)に対応する $\Omega_0 < 1$ と、(iv)に対応する $m < 1$ において、概ね $\Omega \sim 2$ となることがわかる。

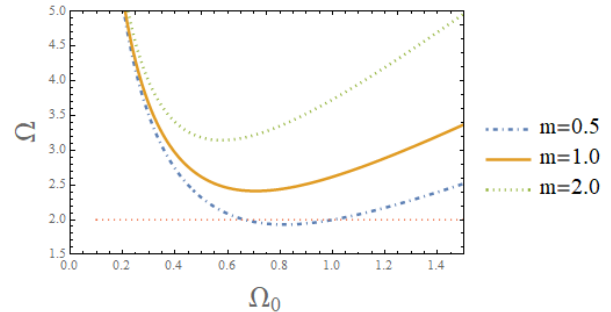


図-3 Ω - Ω_0 プロット

表-1 $\Omega_{\min}$ の分布

m	0.5		1.0		2.0	
h_2	Ω_0	$\Omega_{\min}$	Ω_0	$\Omega_{\min}$	Ω_0	$\Omega_{\min}$
0.03	0.817	1.93	0.707	2.41	0.578	3.14
0.10	0.817	1.91	0.709	2.39	0.580	3.11

3. まとめと今後の展望

本研究は、これらの樹木の基本特性について、解の性質を見通しやすい2質点動力学モデルにより記述することを目的とし、その解析モデルの適用性について検証したものである。検証の結果、基本的性質(i) $\Omega \sim 2$ (ii) $\Omega_0 < 1$ および (iv) $m < 1$ が同時に満足されることがわかり、このことから、本提案モデルにおいて樹木の動的挙動の本質的部分を記述可能であることが示唆された。

今後は、基本的性質(iii)の記述を目指すとともに、樹木の減衰自由振動について、変位の定式化と最も効率的な減衰条件の検討を第一目標とし、実際の樹木の振動と各種パラメータを比較することでそれらの適用性を検証したい。

謝辞

本研究は科研費基盤研究(A)(研究課題番号:18H03818、研究代表者:佐藤太裕)および国際共同研究加速基金(国際共同研究強化)(研究課題番号:15KK0220、研究代表者:佐藤太裕)により実施されたことを付記し、関係各位にお礼申し上げます。

参考文献

- 山本博昭：樹木の固有振動数に関する実験的解析、神大農研報、12、pp.231-238、1977
- 山越憲一、戸川達夫、神谷 瞭、藤井 禎三、土屋喜一：樹木の枝の形態と力学的最適構造、医用電子と生体工学、pp.26-32、1976