

塔状構造物の限界高さに関する基礎的検討

Theoretical study on the critical height of tower structures

北海道大学工学部環境社会工学科 ○ 学生員 橘 岳人 (Gakuto Tachibana)
北海道大学大学院工学研究院 正 員 佐藤 太裕 (Motohiro Sato)

1. はじめに

「塔状の構造物がどこまで高くなれるか?」, その限界高さは自重による座屈強度と大きく関係する. 円柱の自重による座屈強度は文献¹⁾により示されているが, 円柱の断面を下側で大きく上側で小さくすることによって, つまり円錐にすることによって限界高さを大きくすることができるであろう. 例えば大きな樹木などはそのような形態を有しており, その形態は力学的合理性を有していることが想像できる. その理論的背景を力学的な観点から明確にすれば, 樹木形態形成の謎に迫るだけでなく, 塔状構造物の合理的な構造形態に関する新しい知見を与えることができるかもしれない. 以上の点から本研究では, その理論的背景の基礎的な部分を構築すべく, 断面形状と自重による座屈強度, 限界高さを関係づける理論式の導出と, その数学的な特性について考察することを目的とする.

2. 断面と自重による限界高さに関する理論式の導出

2.1 円錐形の自重による座屈に対する限界高さ

本研究では下端を固定した円錐形の解析モデルを仮定する. ここでは, 円錐台の座屈を考え, 円錐台の上面を点に近づけることで円錐の座屈に近似する. 断面の変化を考慮し, 半径を $r = cx$ (c : 樹木側面の傾きを表す定数), 円錐の高さ方向下向きを正とする x 軸 ($0 < a < x < b$) を定める. ここで, 微小な変形が生じたと仮定する. x 軸上のある任意の点 P をとり, その点のせん断力を V と表す. 任意の点 P において $x = x_p$ となる値を設定する. 単位体積重量 γ , 点 P 上部の体積を V_0 , 軸の傾きを θ とする. 微小変形のため, x_p は軸に沿った直線の長さとして扱い, $\sin\theta \approx \theta$ と表すことができる. ここで点 P における力のつり合い関係を考える.

$$V_0 = \int_a^{x_p} \pi r^2 dx = \int_a^{x_p} \pi (cx)^2 dx \quad (1)$$

$$= \frac{1}{3} \pi c^2 (x_p^3 - a^3)$$

$$V = \gamma V_0 \sin\theta \approx \frac{1}{3} \pi c^2 (x_p^2 - a^2) \theta \quad (2)$$

ここで一般的に曲げモーメント M , たわみ v , 位置 x , ヤング係数 E , 断面二次モーメント I を用いて,

$$M = -EI \frac{d^2 v}{dx^2} = -EI \frac{d\theta}{dx} \quad (3)$$

$$I = \int_0^r r^2 dA = \frac{1}{4} \pi c^4 x^4 \quad (4)$$

$$V = \frac{dM}{dx} = \left(-EI \frac{d\theta}{dx} \right)' = -EI \frac{d^2 \theta}{dx^2} \quad (5)$$

と表すことができるため, 以上の式より下記の式を表すことができる.

$$\frac{d^2 \theta}{dx^2} + \frac{4\gamma}{3Ec^2} \cdot \frac{x^3 - a^3}{x^4} \theta = 0 \quad (6)$$

式の簡略化のため, 円錐台の上部は十分 $x = 0$ に近いと仮定し $a \approx 0$ を代入し,

$$A = \frac{4\gamma}{3Ec^2} \quad (7)$$

とおくと, 求める式は以下になる.

$$\frac{d^2 \theta}{dx^2} + \frac{A}{x} \theta = 0 \quad (8)$$

以降, θ を y と置き換えて計算する. 文献²⁾より $y'' + xy = 0$ の一般解は以下に表される.

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) \quad (9)$$

$$y_2(x) = y_1(x) \cdot \int \frac{1}{y_1^2(x)} dx \quad (10)$$

また, (10) の式を変形して係数比較すると, 以下の式が得られる.

$$C_n = \frac{(-A)^n C_0}{(n! \cdot (n+1)!)} \quad (11)$$

ゆえに, 求める y_1 は, 以下の式となる.

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-A)^n C_0}{n! \cdot (n+1)!} x^{n+1} \quad (12)$$

式(9), (10), (12)より式(8)の一般解は, 以下のような形で表すことができる.

$$y(x) = C_1 \left(x - \frac{1}{2} Ax^2 + \frac{1}{12} A^2 x^3 - \frac{1}{144} A^3 x^4 + \frac{1}{2880} A^4 x^5 - \dots \right) + C_2 \left\{ A \left(x - \frac{1}{2} Ax^2 + \frac{1}{12} A^2 x^3 - \frac{1}{144} A^3 x^4 + \frac{1}{2880} A^4 x^5 - \dots \right) \ln x + \left[-1 + \frac{1}{2} Ax + \frac{1}{2} A^2 x^2 - \frac{11}{72} A^3 x^3 + \frac{29}{1728} A^4 x^4 + \dots \right] \right\} \quad (13)$$

ここで, 先端の境界条件 $y'(a) = 0$ と根元の境界条件 $y(b) = 0$ より C_1, C_2 の固有方程式を求める.

式を単純化するため以下のように表す.

$$\begin{bmatrix} s(a) & m(a) + n(a) + As(a) \log a \\ T(b) & AT(b) \log b + k(b) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$s(a) = s = 1 - Aa + \frac{1}{4}A^2a^2 - \frac{1}{36}A^3a^3 + \dots \quad (15)$$

$$m(a) = m = A - \frac{1}{2}A^2a + \frac{1}{12}A^3a^2 - \frac{1}{144}A^4a^3 + \dots \quad (16)$$

$$n(a) = n = \frac{1}{2}A + A^2 + \dots \quad (17)$$

$$T(b) = T = b - \frac{1}{2}Ab^2 + \frac{1}{12}A^2b^3 - \frac{1}{144}A^3b^4 + \dots \quad (18)$$

$$k(b) = k = -1 + \frac{1}{2}Ab + \frac{1}{2}A^2b^2 + \dots \quad (19)$$

以上より C_1, C_2 が $C_1 = C_2 = 0$ 以外の解をもつためには以下の条件が必要である。

$$\Delta = s \cdot (AT \log b + k) - T(m + n + A \log a) = 0 \quad (20)$$

よって、(14)式は以下のように表すことができる。

$$\left(b - \frac{1}{2}Ab^2 + \frac{1}{12}A^2b^3 - \frac{1}{140}A^3b^4 + \frac{1}{2880}A^4b^5 + \dots \right) \left[A \left(1 - Aa + \frac{1}{4}A^2a^2 + \dots \right) \log \frac{b}{a} - \left(A - \frac{1}{2}A^2a + \frac{1}{2}A + A^2a + \dots \right) \right] + \left(1 - Aa + \frac{1}{4}A^2a^2 + \dots \right) \left(-1 + \frac{1}{2}Ab + \frac{1}{2}A^2b^2 - \frac{11}{72}A^3b^3 + \frac{29}{1728}A^4b^4 + \dots \right) = 0 \quad (21)$$

この場合における限界高さ L_{cr} は $L_{cr} = b - a$ となる。

2.2 理論式の近似

式(16)は数列の和と積という形で表される。これに数値を代入しモデルを作るために、どのような近似が適切かを考える。そのため、式(16)に含まれる数列の近似精度を比較した。具体的には、 A と a の多項式と A と b の多項式それぞれでどこまで高次の項を考慮するかの違いにより、以下の複数の近似式を作った。

I A と a の多項式、 A と b の多項式共に A^2 より高次の項は無視する。

II A と a の多項式は、 A^2 より高次の項は無視し、 A と b の多項式は A^3 より高次の項は無視する。

III A と a の多項式は、 A^2 より高次の項は無視し、 A と b の多項式は A^4 より高次の項は無視する。

図-1 は I, II, III の近似式を限界高さ と 根元の直径 で表したものである。ここでは、一般的な木材を想定し単位体積重量を $\gamma = 10 \text{ kg/m}^2 \text{ s}^2$ 、ヤング係数を $E = 9 \text{ GPa}$ 、 $a = b/100$ と定めた。近似による違いを調べるため、以下の計算を行った。根元の直径 100 cm において、近似 I と近似 II の差を近似 II で除した値は -0.029 であり、近似 II と近似 III の差を近似 III で除した値は 0.0033 である。このことから近似 II で十分な精度を得られることが確認できた。

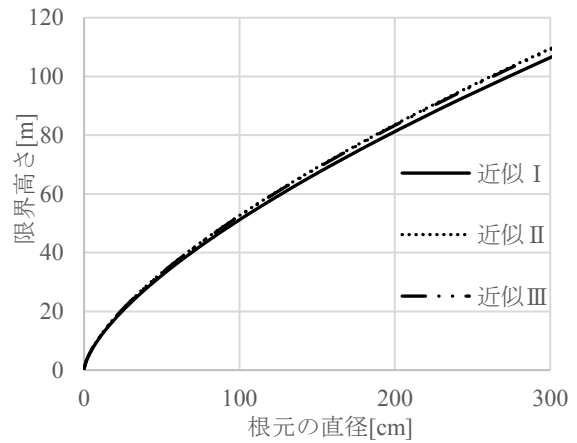


図-1 近似式の精度の比較

3. 根元の直径と限界高さの関係

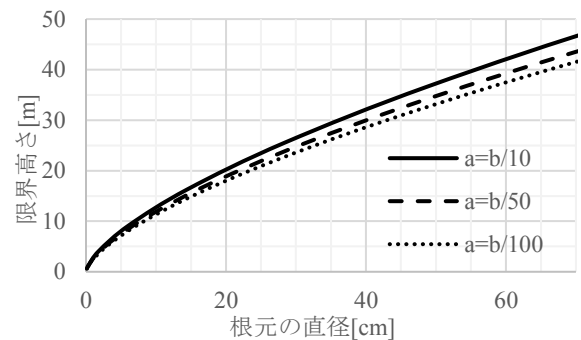


図-2 根元の直径と限界高さ

図-1 は II の近似精度により図-1 と同じ単位体積重量、ヤング係数のもとで a の評価を変えて根元の直径と限界高さをグラフにプロットしたものである。ここでは、 $a = b/10$, $a = b/50$, $a = b/100$ の 3 つのモデルを図示した。 a の値が小さくなるほどモデルは円錐台から円錐に近づくことを意味する。この図より、根元の直径の増加とともに限界高さが増加することがわかる。

4. まとめと今後の展望

本研究では塔状構造物を円錐台としてモデル化し、自重による座屈する限界高さを理論的に導出した。今後は本検討で得られた理論式を実際の樹木データと比較し、樹木が自重に対してどのように抵抗しているか検証することで、樹木の形態形成の仕組みを検討する。

謝辞：

本研究は科研費基盤研究(A)(研究課題番号:18H03818、研究代表者：佐藤太裕)および国際共同研究加速基金(国際共同研究強化)(研究課題番号: 15KK0220、研究代表者：佐藤太裕)により実施されました。また本研究の定式化に際し、山梨大学大学院・島弘幸准教授よりご助言をいただきました。この場をお借りしお礼申し上げます。

参考文献

- 1) John, A. Adam.: Mathematics in nature: modeling patterns in the natural world, Princeton, N.J.; Woodstock: Princeton University press, (2006)
- 2) Zill, D, G.: Advanced engineering mathematics sixth edition, pp.262-278