

竹の維管束配列と曲げ応力の関係に関する理論的考察

Relationship between vascular bundle distribution and bending stresses

北海道大学工学部

北海道大学大学院工学院

北海道大学大学院工学院

山梨大学大学院総合研究所

熊本県立大学環境共生学部

北海道大学大学院工学研究院

○ 正員 大谷 祐貴 (Yuki Otani)

正員 亀山 侑平 (Yuhei Kameyama)

非会員 宮川 奨 (Sho Miyakawa)

非会員 島 弘幸 (Hiroyuki Shima)

非会員 井上 昭夫 (Akio Inoue)

正員 佐藤 太裕 (Motohiro Sato)

1. はじめに

生物は、約 40 億年の進化の中で、多種多様な形態を獲得してきた。その結果、生物は生育する環境に対して有利となるような構造や機能を有していることが多い。その構造や機能を模倣し、技術開発に応用することを生物形態模倣という。例えば、表面の小さな凹凸により水をはじく蓮の葉の構造は、ヨーグルトがつかない蓋の開発に活かされ、実用化されている。竹もまた生態模倣の可能性を秘めている。竹は植物の中でも、中空円筒構造という特異な形態を持ち、その断面に鋼鉄と同程度の強度を持つ維管束を適切に傾斜配列させることによって、自身の曲げ剛性を高めていることが既存の研究により証明されている¹⁾。本研究では、竹の維管束配列が軸方向および円周方向の曲げ応力にどのような影響を及ぼすかについて、材料力学的な検討を行うことを目的とする。

2. 竹断面の最適な維管束配列

2.1 竹断面の維管束配列

図-1(a)は竹断面における維管束分布の様子である。これより、維管束の密度は内側から外側にかけて大きくなることを読み取れる。以下ではこの維管束の配置が曲げ強度特性にどのような影響を及ぼすかを構造力学的に求めることとする。竹断面の中心から半径方向外側を正とする座標 r を定め、中心を通る水平面からの角度を θ 、中心から肉厚部の中心までの距離を a 、肉厚部の厚さを h と定める (図-1(b))。



図-1(a) 竹断面の維管束分布

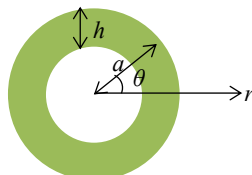


図-1(b) 中空円筒構造の値定義

2.2 維管束分布の関数近似

曲げ応力について解析するために、本研究では純曲げがかかる方向と、断面の潰れに影響する方向を考える。ここではそれぞれを軸方向、円周方向と呼ぶこととする。2.1 で述べたように、竹断面の維管束は断面内側から外側にかけて増加関数のように配列していると考えられる。そこで、維管束体積含有率を軸方向と円周方向とでそれ

ぞれ $V_{f,a}$ 、 $V_{f,c}$ とし、定数 c_i 、 d_i ($i=0,1,2$) を用いた以下の多項式関数により定義する¹⁾。

$$\begin{aligned} V_{f,a} &= c_0 + c_1 r + c_2 r^2 \\ V_{f,c} &= d_0 + d_1 r + d_2 r^2 \end{aligned} \quad \left(a - \frac{h}{2} \leq r \leq a + \frac{h}{2}\right) \quad (1)$$

また、維管束を含んだ軸方向と円周方向の複合ヤング率をそれぞれ E_a 、 E_c 、維管束部と木質部のヤング率をそれぞれ E_f 、 E_m とすると以下のように定義できる²⁾。

$$E_a = E_f V_f + E_m (1 - V_f) \quad (2)$$

$$E_c = \left(\frac{V_f}{E_f} + \frac{1 - V_f}{E_m} \right)^{-1} \quad (3)$$

3. 維管束配列による応力最小化

3.1 軸方向の曲げ応力の最小化

曲げモーメントを M 、軸方向の任意の点の発生応力を σ_a 、曲げ剛性を D_a と定めると、以下の等式が成り立つ。

$$\sigma_a = \frac{E_f V_{f,a}}{D_a} M r \sin \theta + \frac{E_m (1 - V_{f,a})}{D_a} M r \sin \theta \quad (4)$$

また、維管束部と木質部での曲げ応力を σ_f 、 σ_m とすると、それぞれ以下のように表される。

$$\sigma_f = \frac{E_f}{D_a} M r \sin \theta \quad (5)$$

$$\sigma_m = \frac{E_m}{D_a} M r \sin \theta \quad (6)$$

維管束部と木質部のいずれにかかる応力も、曲げ剛性 D_a が増加することで減少していく。よって全体の曲げ応力は、曲げ剛性が最大のときに最小になる。ここで、曲げ剛性は式(7)で表される。

$$D_a = \int_0^{2\pi} \int_{a-\frac{h}{2}}^{a+\frac{h}{2}} \{ E_f V_{f,a} + E_m (1 - V_{f,a}) \} r^3 \sin^2 \theta dr d\theta \quad (7)$$

最外面での維管束量を $V_{f,out}$ 、最内面での維管束量を $V_{f,in}$ とし、最大値及び最小値をそれぞれ 0.6、0.1 に設定して制約条件を定めた。また、計算を容易にするため以下のように座標変換を行った。

$$r' = \frac{1}{h} \left\{ r - \left(a - \frac{h}{2} \right) \right\} \quad (8)$$

また、これにより式(1)は以下に書き換えられる。

$$\begin{aligned} V_{f,a} &= c'_0 + c'_1 r' + c'_2 r'^2 \\ V_{f,c} &= d'_0 + d'_1 r' + d'_2 r'^2 \end{aligned} \quad (0 \leq r' \leq 1) \quad (9)$$

平均維管束含有率 V_f^{av} を 0.1~0.6 の範囲で変化させ、式(9)及び制約条件から曲げ剛性を最大化する係数を求めたところ、図-2 のグラフが得られた。つまり軸方向で

は、図-2 に示される維管束配列が、曲げ応力を最小化すると言える。

3.2 円周方向の曲げ応力最小化

円周方向の任意の点の発生応力を σ_c 、曲げ剛性を D_c と定めると、以下の等式が成り立つ。

$$\sigma_c = \frac{M(a-r)}{D_c \left(\frac{V_{f,c}}{E_f} + \frac{1-V_{f,c}}{E_m} \right)} \quad (10)$$

$$D_c = E_m \int_{a-\frac{h}{2}}^{a+\frac{h}{2}} \frac{(a-r)^2}{1 - \frac{E_f - E_m}{E_f} (d_0 + d_1 r + d_2 r^2)} dr \quad (11)$$

3.1 と同様にして、式(10)における応力 σ_c を最小化する最適な維管束配列を求めた結果を図-3 に示す。図-2 と図-3 の比較により、両者の値はおおよそ一致していることが読み取れる。式(2)及び(3)から、軸方向と円周方向とで維管束が断面全体のヤング率に与える影響は異なることが分かる。そのため、竹断面での発生応力に対する維管束の働き方は異なると考えられる。それにも関わらず、本結果は、図-2 及び 3 で示される維管束配列により軸方向及び円周方向で同時に応力最小化が実現できることを示しており、非常に興味深い結果である。

4. 竹断面の実測値との比較

図-4 は、Amada らにより得られた実際の竹断面の維管束分布を表すものである³⁾。 n は節間部に地表面から順に $n=1,2,3,\dots$ と振られた番号を表し、 $n=14,15,23,42$ の断面における維管束分布をプロットし回帰したものがグラフとして示されている。 n が大きくなるほど地表面から高い位置の竹断面の維管束配列を表している。竹は、高さが低いほど肉厚が大きく、高さが増すにつれて肉厚が小さくなっていくことが知られているため、 n が大きいほど維管束含有率は高くなる。図-4 から、地表面付近では二次関数的な分布を示し、高さが増すにつれて、徐々に線形的な分布に近づいていくことが読み取れる。図-5 は、図-4 と同じ条件で発生応力を最小化する維管束分布を解析により得たものである。これらを比較すると両者の維管束分布は非常に高い整合性があることが読み取れる。

5. まとめ

本研究から得られた知見を以下にまとめた。

- ・今回、維管束分布を多項式関数で表し、それをもとに曲げ応力を最小化する適切な維管束配列を軸方向と円周方向の両方向で求めた。その結果、両方向での最適な維管束配列はおおよそ一致することが分かった。
- ・解析により得られた最適な維管束配列と、実際に竹の持つ維管束配列には高い整合性が見られた。つまり、竹は巧みに維管束配列を変化させることにより、純曲げと潰れの両方向で発生する曲げ応力の最小化を同時に実現していたことが証明された。

今後は、本研究で得られた竹の力学的合理性を実際のものづくりに活かす技術の検討を行うことを大きな目標とする。

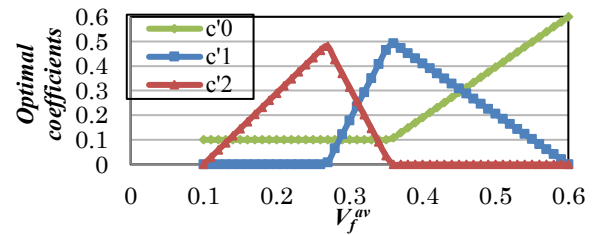


図-2 軸方向の曲げ応力を最小化する係数変化

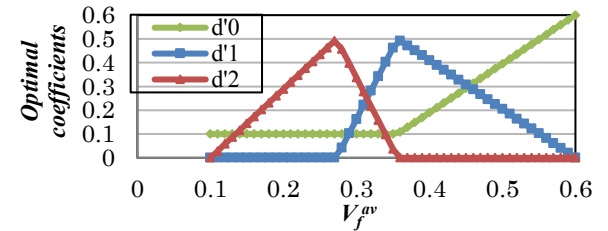


図-3 円周方向の曲げ応力を最小化する係数変化

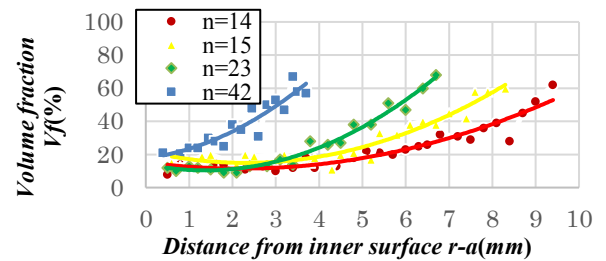


図-4 竹断面の維管束分布の実測値

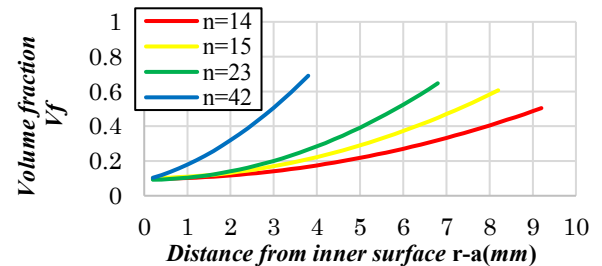


図-5 応力を最小化する維管束分布の解析値

6. 謝辞

本研究は科研費基盤研究(B)(研究課題番号:18KT0037、研究代表者:佐藤太裕)、および国際共同研究加速基金(国際共同研究強化)(研究課題番号:15KK0220、研究代表者:佐藤太裕)により実施されたことを付記し、関係各位にお礼申し上げます。

7. 参考文献

- 1) M. Sato, A. Inoue, and H. Shima : Bamboo-inspired optimal design for functionally graded hollow cylinders, PLOS ONE, e0175029, 2017.
- 2) D. Hull, T. W. Clyne: An introduction to composite materials, Cambridge Univ. Press, pp.60-64, 1990.
- 3) S. Amada, Y. Ichikawa, T. Munekata, Y. Nagase and H. Shimizu : Fiber texture and mechanical graded structure of bamboo, Composites PartB, Vol.28B, pp.13-20, 1996.