三次元弾性理論に基づく周辺単純支持異方性積層板の自由振動解析

Free vibration analysis of simply supported anisotropic laminated plate based on three dimensional theory of elasticity

函館工業高等専門学校　正　　員　渡辺　力 (Chikara WATANABE)
函館工業高等専門学校　学生会員　金浜瞳也 (Tohya KANAHAMA)

1.　まえがき

本研究では，改良 ZIG-ZAG 理論[1] の精度検証のために，周辺単純支持異方性積層板の固有振動数と固有振動モードの厳密解を求めることを目的としている．

三次元弾性理論に基づく異方性積層板の研究は古くから行われている[2)~4)]．中でも，Srinivas らの研究[2] では，異方性積層板の固有振動数を求めるための固有方程式の組み立て方法は示さているものの，実際に計算は行われていない．これは，異方性積層板では，層境界での変位と面外応力の適合条件と，上下縁での応力の境界条件を満足させるために解式が複雑となって，一般的な解法では計算が困難となるためである．このため，異方性積層板の固有振動数の厳密解を示した研究は殆ど無く，精度検証に用いることのできる十分な有効桁数をもった精度の良い厳密解は求められていない．

また，等方性平板の厳密解[3] では，振動数方程式に因数分解を施すことによって固有振動モード毎の振動数方程式に分離できるのでモード分類が容易である[5]．それに対して，異方性積層板では，一般的に対象モードと逆対称モードに分離できないので，新たなモード分類の方法が必要となる．

本研究では，Srinivas らの方法[2] を用いて厳密解を求める．複素固有値問題となる固有方程式から振動数方程式を求め，高次代数方程式となるその行列式を解いて固有振動数を計算する．求めた固有振動モードを板厚方向の固有関数のモードによりモード分類を行う．本報告では，3 層の直交積層板（[0/90°/0]）についてモード分類を行った結果について報告する．

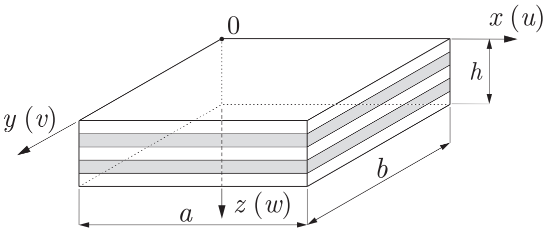
2.　第 k 層のラミナの基礎式

図–1 に示す長さ a，幅 b，板厚 h，層数 N_l の直交積層板の第 k 層のラミナについて，固有関数を誘導する．

2.1　ひずみと応力

第 k 層のひずみ成分は，三次元弾性理論のひずみ – 変位関係式より，

$$\varepsilon_x^{(k)} = \frac{\partial u^{(k)}}{\partial x}, \qquad \varepsilon_y^{(k)} = \frac{\partial v^{(k)}}{\partial y}, \qquad \varepsilon_z^{(k)} = \frac{\partial w^{(k)}}{\partial z}$$
$$\gamma_{xy}^{(k)} = \frac{\partial u^{(k)}}{\partial y} + \frac{\partial v^{(k)}}{\partial x}, \qquad \gamma_{yz}^{(k)} = \frac{\partial w^{(k)}}{\partial y} + \frac{\partial v^{(k)}}{\partial z}$$



図–1　異方性積層板

$$\gamma_{xz}^{(k)} = \frac{\partial w^{(k)}}{\partial x} + \frac{\partial u^{(k)}}{\partial z} \tag{1}$$

となる．応力成分は，三次元弾性理論の構成方程式より，直交積層板に対して次式で与えられる．

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} \overline{Q}_{11} & \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{13} & 0 \\ & \overline{Q}_{22} & \overline{Q}_{23} & 0 \\ & & \overline{Q}_{33} & 0 \\ sym. & & & \overline{Q}_{66} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}^{(k)} \tag{2}$$

$$\begin{Bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} \overline{Q}_{44} & 0 \\ 0 & \overline{Q}_{55} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix}^{(k)} \tag{3}$$

2.2　運動方程式

第 k 層の質量密度を $\rho^{(k)}$ とすると，運動方程式は慣性力を考慮して次のようになる．

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x^{(k)}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}^{(k)}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}^{(k)}}{\partial z} - \rho^{(k)} \frac{\partial^2 u^{(k)}}{\partial t^2} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}^{(k)}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y^{(k)}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}^{(k)}}{\partial z} - \rho^{(k)} \frac{\partial^2 v^{(k)}}{\partial t^2} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}^{(k)}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}^{(k)}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z^{(k)}}{\partial z} - \rho^{(k)} \frac{\partial^2 w^{(k)}}{\partial t^2} &= 0 \end{aligned} \tag{4}$$

2.3　変位関数

図 – 1 に示す積層板の境界条件として，次の隔壁型の単純支持を用いる．

$$\left.\begin{aligned} &\text{at } x = 0, a \;;\quad \sigma_x = 0,\ v = 0,\ w = 0 \\ &\text{at } y = 0, b \;;\quad \sigma_y = 0,\ u = 0,\ w = 0 \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

式 (4) の変位 $u^{(k)}, v^{(k)}, w^{(k)}$ を，式 (5) を満たす次の二重フーリエ級数で仮定する．

$$\begin{Bmatrix} u^{(k)} \\ v^{(k)} \\ w^{(k)} \end{Bmatrix} = h \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} \phi^{(k)}(\zeta)\cos(m\pi\xi)\sin(n\pi\eta) \\ \psi^{(k)}(\zeta)\sin(m\pi\xi)\cos(n\pi\eta) \\ \chi^{(k)}(\zeta)\sin(m\pi\xi)\sin(n\pi\eta) \end{Bmatrix} e^{ipt} \tag{6}$$

ここに，$\phi^{(k)}, \psi^{(k)}, \chi^{(k)}$ は板厚方向の固有関数で，p は固有円振動数である．正規化座標 ξ, η, ζ は次式で与えられる．

$$\xi = x/a, \quad \eta = y/b, \quad \zeta = z/h \tag{7}$$

2.4　固有関数の一般解

式 (4) に式 (6) の変位関数を代入して，運動方程式を次のように表す．

$$\begin{bmatrix} d_1 + d_2 D^2 & d_3 & d_4 D \\ d_3 & d_5 + d_6 D^2 & d_7 D \\ -d_4 D & -d_7 & d_8 + d_9 D^2 \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \phi^{(k)} \\ \psi^{(k)} \\ \chi^{(k)} \end{Bmatrix} = \mathbf{0} \tag{8}$$

ここに，式 (8) の D は微分演算子で，$D{=}d/dz$ である．式 (8) の左辺の係数行列の行列式から 6 個の演算子 D_i を求め，それらを式 (8) に代入して固有ベクトルを求める．これらを用いて固有関数の一般解は次のようになる．

$$\begin{Bmatrix} \phi^{(k)} \\ \psi^{(k)} \\ \chi^{(k)} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} \phi_1^{(k)} e^{D_1\zeta} & \phi_2^{(k)} e^{D_2\zeta} & \cdots & \phi_6^{(k)} e^{D_6\zeta} \\ \psi_1^{(k)} e^{D_1\zeta} & \psi_2^{(k)} e^{D_2\zeta} & \cdots & \psi_6^{(k)} e^{D_6\zeta} \\ \chi_1^{(k)} e^{D_1\zeta} & \chi_2^{(k)} e^{D_2\zeta} & \cdots & \chi_6^{(k)} e^{D_6\zeta} \end{bmatrix} \left\{ \boldsymbol{a}^{(k)} \right\} \tag{9}$$

ここに，未知定数ベクトル $\boldsymbol{a}^{(k)}$ を次式で与える．

$$\boldsymbol{a}^{(k)} = \left\{ \begin{matrix} a_1^{(k)} & a_2^{(k)} & \cdots & a_6^{(k)} \end{matrix} \right\}^T \tag{10}$$

3.　固有方程式

3.1　応力の境界条件

板の上縁に z 方向の分布荷重 q が作用するとすると，板の上下縁で次の境界条件を満足する必要がある．

$$\begin{aligned} &\text{at } \zeta = 0: \ \sigma_z^{(1)}(0) = -q, \ \tau_{yz}^{(1)}(0) = \tau_{xz}^{(1)}(0) = 0 \\ &\text{at } \zeta = 1: \ \sigma_z^{(N_l)}(1) = \tau_{yz}^{(N_l)}(1) = \tau_{xz}^{(N_l)}(1) = 0 \end{aligned} \tag{11}$$

3.2　変位と面外応力の適合条件

積層板では，層境界において，変位と面外応力が連続する必要がある．よって，次式を満足する必要がある．

$$\begin{aligned} &u^{(k-1)}(\zeta_k) - u^{(k)}(\zeta_k) = 0, \quad v^{(k-1)}(\zeta_k) - v^{(k)}(\zeta_k) = 0 \\ &w^{(k-1)}(\zeta_k) - w^{(k)}(\zeta_k) = 0 \end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned} &\sigma_z^{(k-1)}(\zeta_k) - \sigma_z^{(k)}(\zeta_k) = 0, \quad \tau_{yz}^{(k-1)}(\zeta_k) - \tau_{yz}^{(k)}(\zeta_k) = 0 \\ &\tau_{xz}^{(k-1)}(\zeta_k) - \tau_{xz}^{(k)}(\zeta_k) = 0 \end{aligned} \tag{13}$$

3.3　固有方程式の組み立て

式 (9) の固有関数を用いて，第 k 層の変位と応力を求める．この変位と面外応力が式 (11), (12), (13) を満足するように組み立てて，次の固有方程式が得られる．

$$[\,\boldsymbol{C}\,]\ \{\,\boldsymbol{a}\,\} = \mathbf{0} \tag{14}$$

ここに，

$$\boldsymbol{a} = \left\{ \begin{matrix} \boldsymbol{a}^{(1)} & \boldsymbol{a}^{(2)} & \cdots & \boldsymbol{a}^{(N_l)} \end{matrix} \right\}^T \tag{15}$$

である．式 (14) が異方性積層板の固有方程式であり，$6N_l$ 元の複素固有値問題となる．

3.4　無次元振動数

式 (14) が $\boldsymbol{a}{=}\mathbf{0}$ 以外の有意な解を持つためには，式 (14) の係数行列の行列式がゼロとならなくてはいけない．

$$|\,\boldsymbol{C}\,| = 0 \tag{16}$$

本研究では，式 (16) の高次代数方程式を解いて無次元振動数 λ を求める．

$$\lambda = p\,h\sqrt{\frac{\rho}{E_2}} \tag{17}$$

4.　数値計算例

4.1　計算モデル

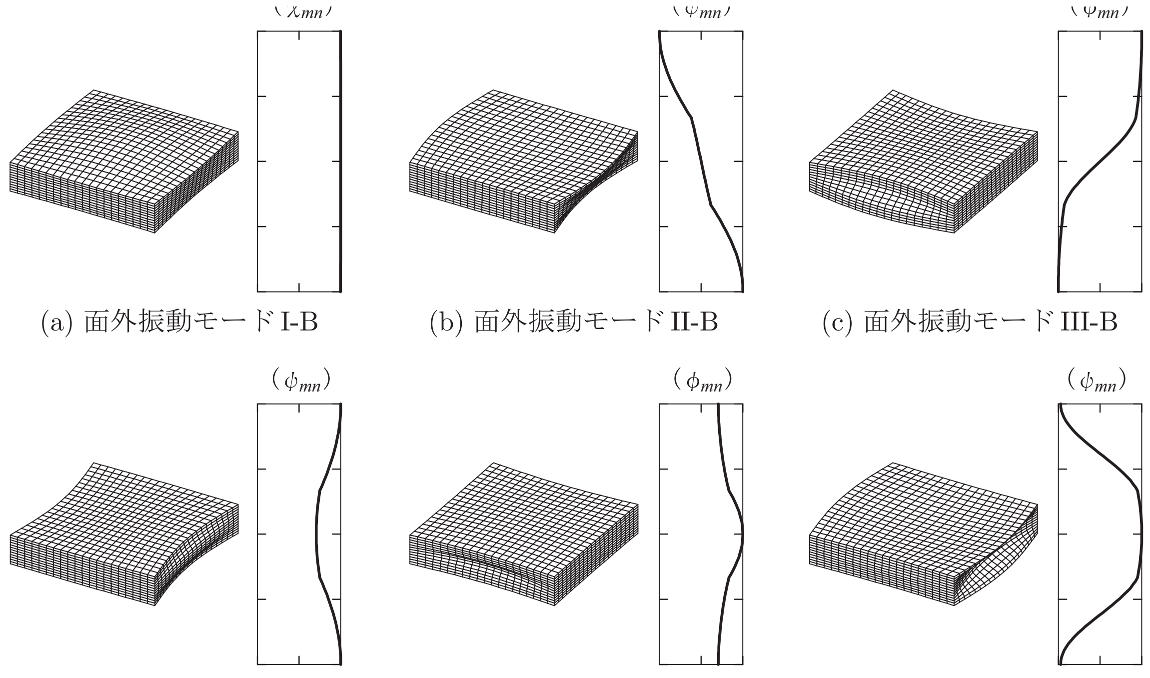
計算モデルは，図−**1** に示す長さ a，幅 b，板厚 h の周辺単純支持された直交積層板であり，形状比を $a/b{=}1$ とする．層数 N_l を 3 とし，配向角を $[0/90°/0]$ とする．材料定数には次の値を用いる．

$$E_1/E_2 = 25, \quad E_3 = E_2, \quad G_{12} = G_{13} = 0.5E_2$$
$$G_{23} = 0.2E_2, \quad \nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{23} = 0.25$$

4.2　固有振動モードの分類方法

等方性平板の厳密解については，Srinivas らの論文[3)]の中で I-A, II-A, III-A，I-S, II-S, III-S などのモード毎に固有振動数が示されている．原論文ではその分類方法について示さていないが，渡辺らは Srinivas らの示した振動数方程式に因数分解を施すことによって固有振動モード毎の振動数方程式に分離し，Distortion モード，逆対称モード，対称モードの振動数方程式を示している．そのため，等方性平板のモード分類はそれらの式を解いて得られるモードから容易に分類できる[5)]．それに対して，異方性積層板では，式 (16) をモード毎の式に分離することは困難であり，新たなモード分類の方法が必要となる．

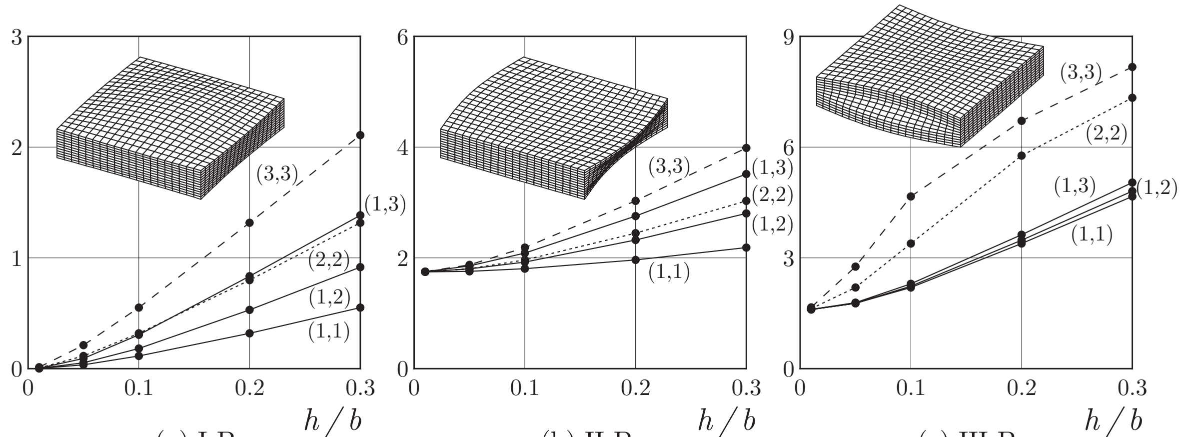
本研究では，式 (9) の固有関数の板厚方向の分布に応じて固有振動モードを分類する．図 − **2** に固有振動モードを 6 つのモードに分類した結果と基本固有関数モードを示す．



(a) 面外振動モード I-B　(b) 面外振動モード II-B　(c) 面外振動モード III-B

(d) 面内振動モード I-P　(e) 面内振動モード II-P　(f) 面内振動モード III-P

図–2　固有振動モードの分類



(a) I-B　(b) II-B　(c) III-B

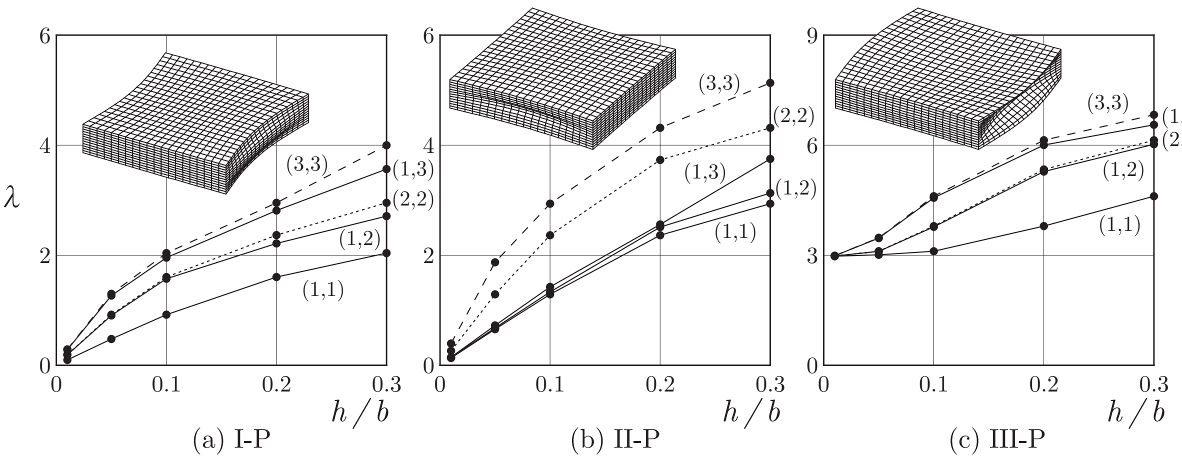
図–3　面外振動モードの無次元振動数

本計算例 [0/90°/0] のように板厚方向に対称となるように積層された対称積層板では，板厚方向について中央面を基準として，逆対称となるモードと対称となるモードに分類できる．逆対称となるモードを面外振動モード，対称となるモードを面内振動モードと呼ぶこととする．

面外振動モード（B モード）は，I-B, II-B, III-B の 3 つのモードに分類する．I-B モードは，図 – **2**(a) に示すように面外変位 w（$\chi^{(k)}$）が卓越するモードであり，式 (9) の固有関数 $\chi^{(k)}$ が板厚方向に一定で最大となるモードである．II-B モードは，図 – **2**(b) に示すように面内変位 v（$\psi^{(k)}$）が卓越するモードであり，式 (9) の固有関数 $\psi^{(k)}$ が板厚方向に逆対称となるモードである．III-B モードは，図 – **2**(c) に示すように面内変位 u（$\phi^{(k)}$）が卓越するモードであり，式 (9) の固有関数 $\phi^{(k)}$ が板厚方向に逆対称となるモードである．図–**2**(a)〜(c) には固有関数の基本モードを示している．

なお，面外振動モード I-B，II-B，III-B は，等方性平板での Mindlin の曲げ振動モード (逆対称モード)，I-A(flexural) モード，II-A(thickness-twist) モード，III-A(thickness-shear) モードに対応するモードである．

面内振動モード（P モード）は，I-P, II-P, III-P の 3 つのモードに分類する．I-P モードは，図–**2**(d) に示すように面内変位 v（$\psi^{(k)}$）が卓越するモードであり，式 (9) の固有関数 $\psi^{(k)}$ が対称となるモードである．II-P モードは，図–**2**(e) に示すように面内変位 u（$\phi^{(k)}$）が卓越するモードであり，式 (9) の固有関数 $\phi^{(k)}$ が対称となるモードである．III-P モードは，図–**2**(f) に示すように，I-P モードと同様に面内変位 v（$\psi^{(k)}$）が卓越



図–4　面内振動モードの無次元振動数

するモードであるが，式 (9) の固有関数 $\psi^{(k)}$ が最大値が -1〜1 に分布する対称モードである．

図－2 には板厚比 h/b=1/5 の場合の半波長数 (1,1) の振動モードと固有関数モードを示している．配向角の異なるラミナを重ねた積層板では，面外振動モード II-B と III-B，面内振動モード I-P と II-P から分かるように，$x=$ 一定面と $y=$ 一定面とで板厚方向の振動波形が大きく異なる．さらに，各振動モードの板厚方向の波形は，半波長数 m,n が高次波形となるほど，板厚比 h/b が大きくなるほど曲率が大きな曲線分布となる．

4.3　無次元振動数と板厚比

図–3 は，面外振動モード I-B, II-B, III-B における板厚比 h/b と無次元振動数 λ の関係を示したものである．半波長数 (1,1), (1,2), (1,3), (2,2), (3,3) の波形について，横軸に板厚比 h/b を，縦軸には無次元振動数 λ をとっている．また，**図－4** は，面外振動モード I-P, II-P, III-P における板厚比 h/b と無次元振動数 λ の関係を示したもので，面外振動モード**図－3** と同様に表している．

どのモードでも板厚比 h/b が大きくなると固有振動数も大きくなる．しかし，等方性平板とは違い，半波長数 (m,n) 毎の分布は波形の卓越する方向により大きく異なっている．

5.　まとめ

Srinivas らの方法 [2] を用いて，周辺単純支持異方性積層板の自由振動解析における厳密解を求めた．さらに，3 層の直交積層板（[0/90°/0]）の固有振動モードを板厚方向の固有関数モードによりモード分類を行い，その妥当性を確かめた．今後，逆対称積層板についても検討を行う．

謝辞：　本研究は JSPS 科研費 JP16K06480 の補助を受けた．ここに，記して感謝の意を表する．

参考文献

1) 渡辺 力：効果的な ZIG-ZAG 関数の開発と異方性積層板ならびに等方性平板の厚板解析への適用, 土木学会論文集 A2（応用力学）, Vol.74, No.1, pp.75-91, 2018.
2) Srinivas,S. and Rao,A.K.：Bending, vibration and buckling of simply supported thick orthotropic rectangular plates and laminates, *Int.J. Solids Struct.*, Vol.6, pp.1463–1481, 1970.
3) Srinivas, S., Rao, C.V.J. and Rao, A.K.： An exact analysis for vibration of simply-supported homogeneous and laminated thick rectangular plates, *Journal of Sound and Vibration*, Vol.12, pp.187–199, 1970.
4) Pagano, N. J.：Exact solutions for rectangular bidirectional composites and sandwich plates, *J. Compos. Mater.*, Vol.4, pp.20-34,1970.
5) 渡辺 力, 林　正： 変位場を規定するハイアラーキソリッド要素による平板の自由振動解析, 構造工学論文集, Vol.59A, pp.1-13, 2013.