Ｂ－５５　　平成29年度　土木学会北海道支部　論文報告集　第74号

水文確率値の評価基準の研究

A Study on Evaluation Criterion of Hydrological Probability Value

北海学園大学工学部社会環境工学科　○学生員　後藤翔生（Shoki Goto）
北海学園大学工学部社会環境工学科　学生員　岡田拓巳（Takumi Okada）
北海学園大学工学部社会環境工学科　フェロー　許士達広 (Tatsuhiro Kyoshi)

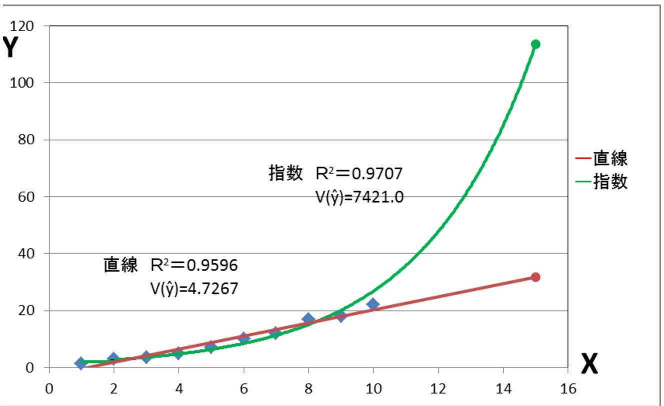
1．はじめに

河川計画に用いられる水文確率値の算定については、一般には既に一定の理論的整理がなされていると考えられている。しかし現実にはどのような確率モデルが良いか、その算定方法はどの方式が良いか、それを何で評価するかについては、依然として明確な答えは得られていない。本研究では水文確率の最適値の算定に重要な根本的問題である「何をもって最適とするか」の判断基準について考察する。

２．適合性と変動性

水文確率モデルの評価指標は適合性を示すものと変動性を示すものに大別される。適合性はモデルに使用したデータと推定値の差を見るものであり、具体的指標として誤差分散 se^2、決定係数、SLSC、AIC などが用いられている。変動性は観測データが追加されたとき計画値が大きく変動しないように推定値の変動する度合いを見るもので、モデルとなる関数ごとに積率法や最尤法による推定誤差分散の式が導出されているほか、ジャックナイフ法やブートストラップ法といったリサンプリング法が使用される。どちらを優先するかが問題であるがこの二つの評価指標は一般的に両立しない。データへの適合性が高いモデルはデータの変動に追随して変化し、変動が大きくなるためである。

確率モデルの問題は回帰式の問題に置き換えて考えることができる。図―１は通常の X-Y 座標上のデータに対し、直線と指数関数回帰の線を当てはめたものである。２つの関数の決定係数Ｒ^{2}を比較すると指数の値の方がやや大きく、適合性が良いということになる。



図－１　適合度のみでは判断できない例

しかしジャックナイフ法による x=15 の外挿値の誤差分散は、指数による推定値の方が 1000 倍以上になり、人間の目でも指数による推定値が妥当には見えない。このようにデータが存在する区間で適合性が高いモデルが、良い推定値を与えるとは限らない。言い換えれば外挿推定するとき、一般にデータに適合した関数を算定して推定値はその延長上にあるとしているが、それが必ずしも正しいとは言えない。

３．予測誤差

必要なことは各種の確率分布と算定方法に対する評価を、適合性と変動性の両方を考えた指標で算出することである。回帰式においては予測誤差の概念があり、回帰推定の評価を適合性だけでなく変動性も加えた誤差で表すことができる。式１）の１項目が残差分散で適合性を、２，３項目は残差による変動を表す。

$$S_T^2 = V\left(y-\hat{y}\right) = s_e^2 + s_e^2\left[\frac{1}{n} + \frac{(x_0-\bar{x})^2}{S_{xx}}\right]$$

$$= \left[1+\frac{1}{n}+\frac{(x_0-\bar{x})^2}{S_{xx}}\right]s_e^2 \quad \cdot\cdot\cdot 1)$$

ただし，　S_T^2：予測誤差分散　S_{xx}: 偏差平方和

s_e^2 残差による誤差分散　n　：データ数

データのある点 x_0 の予測誤差分散を全点で平均すると

$$\overline{S_T^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[1+\frac{1}{n}+\frac{(x_i-\bar{x})^2}{S_{xx}}\right]s_e^2 = \left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\right)s_e^2$$

$$= \frac{n+2}{n} * \frac{S_e}{n-2} = \frac{1}{n} * \frac{n+2}{n-2} S_e \quad \cdots \quad 2)$$

同様に多変量

$$\hat{y}_i = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_px_p \quad \cdot\cdot\cdot 3)$$

のとき　$\overline{S_T^2} == \dfrac{n+p+1}{n-p-1} s_e^{2*}$　・・・４）

ただし $s_e^{2*} = S_e/n$　　Se　：残差平方和

(４)式は最終予測誤差とよばれ、定数の数 k ＝p+1 に置き換え対数をとり n 倍すると、以下のように AIC と同じものが求められる。

$$n\log\left(\frac{n+k}{n-k}\right)s_e^{2*}=n\log\left(\frac{n+k}{n-k}\right)+n\log s_e^{2*}$$

$$=n\log\left(1+\frac{2k}{n-k}\right)+n\log s_e^{2*}\approx n\frac{2k}{n-2k}+n\log s_e^{2*}$$

$$\approx n\log s_e^{2*}+2k=AIC \quad ・・・5)$$

以上から予測誤差分散が適合度と変動性を合わせた推定点の評価指標として有効と考えられる。

４．確率分布への適用

プロッティングポジションを用いて回帰式で確率推定値を求めることができる。この時横軸はデータではなく標準変量であるため、誤差変動分散は回帰式とは別の式となり、２母数分布以外はかなり複雑になる。積率法の誤差分散の一般式は以下のように与えられる。

$$S_T{}^2=\frac{\mu_2}{n}\Big\{1+K\gamma_1+\frac{K^2}{4}[\gamma_2-1]+\frac{\delta K}{\delta\gamma_1}[2\gamma_2-\frac{\delta K}{\delta\gamma_1}[2\gamma_2-3\gamma_1{}^2-6+K(\gamma_3-6\gamma_1\gamma_2/4)]+\left(\frac{\delta K}{\delta\gamma_1}\right)^2\left[\gamma_4-3\gamma_3\gamma_1-6\gamma_2-\frac{9\gamma_1{}^2\gamma_2}{4}+\right. \quad ・・・6)$$

$$\gamma_1=\mu_3/\mu_2{}^{3/2} \qquad \gamma_2=\mu_4/\mu_2{}^2$$

$$\gamma_3=\mu_5/\mu_2{}^{5/2} \qquad \gamma_4=\mu_6/\mu_2{}^3$$

μ_2～μ_6：2～6 次モーメント

$$K=\frac{\varepsilon_p-\bar{\varepsilon}}{\sigma_\varepsilon}$$

ε_p：確率値の標準変量　$\bar{\varepsilon}$：標準変量の平均

σ_ε：標準変量の標準偏差

式で与えられる分散はデータから推定される分布形状が、式に完全に一致している場合の値であり、かつ最尤法と積率法など算出方法によって異なるため、同じ指標で比較することができない。このためここでは７)式のように変動成分としてジャックナイフ誤差分散を用い、全変動を誤差変動に直す補正を行った。これによりモデルの関数と算出方法の両方について、統一した手法で評価することができる。既往の研究ではジャックナイフ法の値は一般式よりやや小さめの値を示すとされている。

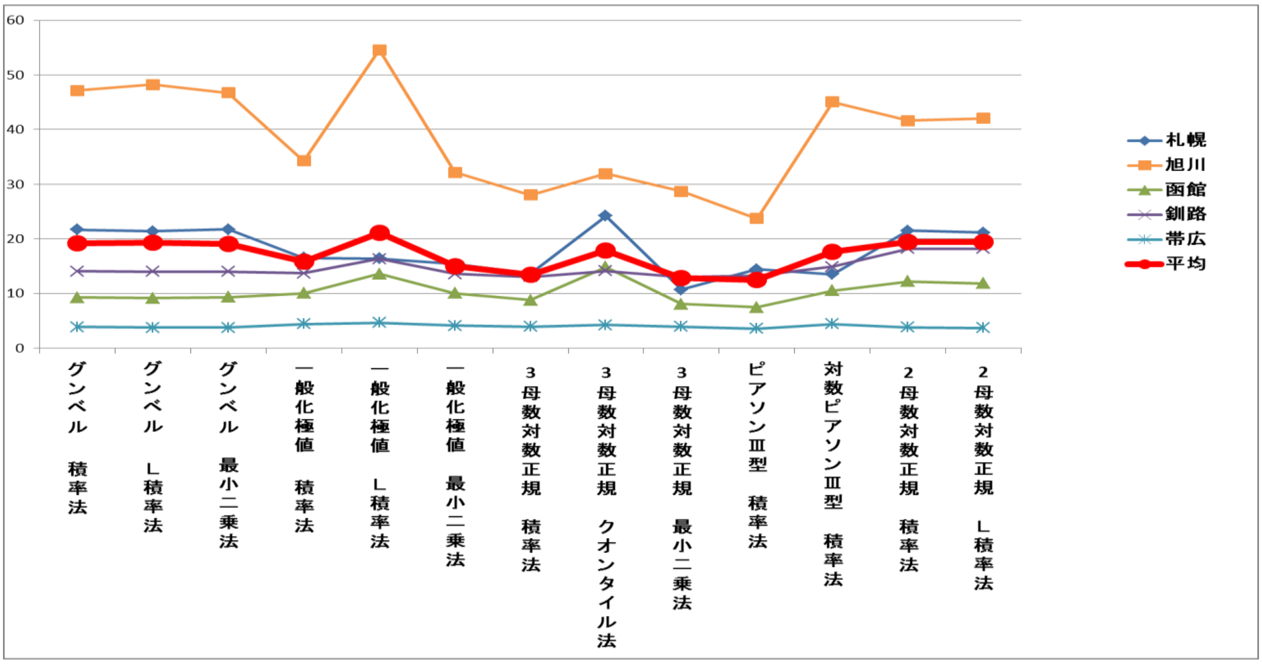
$$S_T{}^2=s_e{}^2+V_J*s_e{}^2/s_y{}^2 \quad ・・・7)$$

V_j　：ジャックナイフ誤差分散　$s_y{}^2$　：全変動分散

図‐２は北海道内の観測所の過去 100 年の既往日最大降雨について、モデルと計算法の組み合わせ別に予測誤差を算出したものである。計算は SLSC 等の他の評価指標も同時に行い、公開ソフト水文統計ユーティリティーと比較し確認している。グンベルや LN2(2 母数対数正規)が良くないのは適合性が悪いためであり、逆に変動性は 2 母数のほうが少なく、データ数が小さい場合は 2 母数でも予測誤差に大差がなくなる。最小二乗法はプロッティング定数によるが、α＝0.5 を用いた場合、同じ分布では積率法、L 積率法より良好な値となる。従来理論的に推奨されている一般化極値分布と L 積率法の値があまり良くないが、SLSC、AIC,ジャックナイフ誤差分散などの他の指標でも同じ傾向が見られる。逆に近年用いられないピアソンⅢ型や 3 母数対数正規分布が良好でありこれらの分布も検討されるべきである。

おわりに

適合度と変動性を合わせた指標として予測誤差分散を利用したものを提案した。今後手法・モデルの種類並びにデータ地点を加えてさらに検討する。



図‐2 適合性と変動性を合わせた指標（予測誤差)