

植生層の密度が開水路流に与える影響

THE INFLUENCE OF CANOPY DENSITY ON OPEN-CHANNEL FLOW

北海道大学大学院工学院 ○学生員 恒川和久 (Kazuhiisa Tsunekawa)
 北海道大学大学院工学研究院助教 正員 Adriano Continho de Lima
 北海道大学大学院工学研究院助教 正員 泉典洋 (Norihiro Izumi)

1. はじめに

実河川の河床には植生層がしばしば観測される。この植生層は環境に対して重要な役割を担う一方で、洪水時には流下能力を阻害し氾濫を助長させてしまうなどの問題点も持つ。そのため沈水植物が流体に与える影響に関する研究が多くなされている。

清水ら¹⁾は模擬的な植生層を開水路に設けて、植生層を有する流れの水理現象を理解するための実験的研究を行った。植生層内部の流れは植生層との境界面での流れ（以下、表面流と称する）に近づく、植生層内部よりも大きな流速を持つ表面流に引っ張られるため、上に凸な速度勾配が現れることを示した。一方で、植生層より上部では通常の壁面乱流と同様の対数分布に従った下に凸な流速勾配が現れる。

Poggi ら²⁾も同様に模擬的な植生層を開水路に設けた実験を行った。この研究で Poggi ら²⁾は、植生層を有する開水路流には3種類の乱れが発生することを示した。1つは植生層との境界面でのせん断力によって発生する通常の壁面乱流と同様の乱れである。2つ目は密度又は流速の異なる2つの水平移動する流体の境界面で発生するケルビン・ヘルムホルツ不安定性による乱れであり、植生層との境界面付近で発生する。3つ目は植生層の後方に交互に発生するカルマン渦による乱れであり、植生層内部にのみ発生する。

本研究は実際の乱流をより明確に表現できる混合距離モデルを用いた数値解析を行うことで、植生を有する開水路流の流れの構造を解明するものである。植生層を有する開水路流の流速分布を求めることに加え、線形安定解析を行うことで植生層の抵抗値によって変化する安定性ダイアグラムを求めた。また本研究では植生層上部に発生するケルビン・ヘルムホルツ不安定性が開水路流の不安定性を生じさせていることを前提に置いている。基本状態における流れはケルビン・ヘルムホルツ不安定性の影響を受けず安定したものとする。基本状態を上述のように定義することで、ケルビン・ヘルムホルツ不安定性が生じる条件をより明確に特定することが可能となる。

2. 定式化

本研究では図-1のような植生層を有する開水路について考える。開水路は緩勾配流で、植生層は一様で流れによって形が変化しないものとする。植生層外を領域A、植生層内を領域Cとする。流れの支配方程式は次のような Navier-Stokes 方程式に植生層の抵抗を与えた式と、連

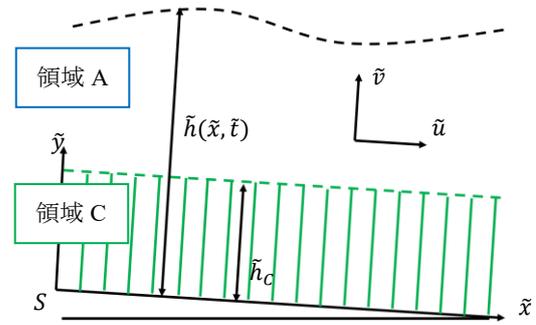


図-1 植生層を有する開水路の模式図

続式によって表すことができる。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + 1 + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} - D_x \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} - S^{-1} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (3)$$

ここで x および y はそれぞれ流下方向および水深方向の座標、 u および v はそれぞれ x および y 方向の流速、 S および p はそれぞれ平均河床勾配および圧力、 τ_{ij} ($i, j = x, y$) は応力テンソル、 D_x は植生の抵抗、 h は水深、 h_c は植生の高さである。なお植生の抵抗 D_x に関しては Poggi ら²⁾と同様に、植生の抗力係数および植生の密度の影響を表すパラメーターを α とし、領域 C の水平方向の流速 u_c と α を用いて次のように表せる。

$$D_x = \alpha |u_c| u_c \quad (4)$$

なお、 α に含まれる抗力係数は一定とし、植生の密度にのみ依存して α の値が変化するものとする。

本研究で用いる混合距離について説明する。領域 A の混合距離は次の式で表すことができ、通常の開水路同様に水深によって変化する。

$$l = l_a = \kappa(y - h_B) \sqrt{\frac{h - y}{h - h_B}} \quad (5)$$

ここで h_B は $l_a = 0$ となる時の水深である。一方領域 C では植生層の影響によって混合距離が一定となる。領域 C の混合距離は次の式で表せる。

$$l = l_c = \frac{d_r}{\gamma} \quad (6)$$

ここで d_r は植生1本あたりの幅(=0.004m), γ は実験則に基づくパラメーター(=0.21)であり, いずれもPoggiら²⁾の実験で用いられた値である. κ はカルマン定数(=0.4)である. 混合距離モデルを用いるとレイノルズ応力テンソルは次のように表せる.

$$\tau_{xx} = 2\nu_t \frac{\partial u}{\partial x}, \tau_{yy} = 2\nu_t \frac{\partial v}{\partial y} \quad (7a,b)$$

$$\tau_{xy} = \nu_t \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (7c)$$

$$\nu_t = l^2 \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \quad (8)$$

ν_t は渦動粘性係数である.

上記の式を無次元化するために用いた関係式を示す.

$$(\tilde{u}, \tilde{v}) = \tilde{u}_f(u, v), \quad (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{h}, \tilde{d}_r) = \tilde{h}_c(x, y, h, d_r)$$

$$\tilde{t} = \frac{\tilde{h}_c}{\tilde{u}_f} t, \quad (\tilde{p}, \tilde{\tau}_{ij}) = \rho \tilde{u}_f^2 (p, \tau_{ij}) \quad (9a,b,c,d)$$

ここで $\tilde{u}_f (= gS\tilde{h}_c)$ は摩擦速度である.

次式で定義される流関数を導入する.

$$(u, v) = \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}, -\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \quad (10)$$

すると式(1)(2)は次のように書き直すことができる.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\frac{\partial p}{\partial x} + 1 \\ + \frac{\partial}{\partial x} \left(2\nu_t \frac{\partial \psi}{\partial x \partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left[\nu_t \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right) \right] - D_x \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} -\frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{1}{S} \\ - \frac{\partial}{\partial y} \left(2\nu_t \frac{\partial \psi}{\partial x \partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left[\nu_t \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (12)$$

上記の式から p を消去すれば次の式が得られる.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial y} - 4 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\nu_t \frac{\partial \psi}{\partial x \partial y} \right) \\ + \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left[\nu_t \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right) \right] + \frac{\partial D_x}{\partial y} \end{aligned} \quad (13)$$

ここで ∇^2 は次式で表される.

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (14)$$

3. 境界条件

水面における運動学的境界条件は次の式で表される.

$$\frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} = v \text{ at } y = h \quad (15)$$

自由表面に働くせん断力は十分に小さいと仮定して圧力の基準を大気圧にとると, 水面では接線および法線方向の応力がゼロとなり次式が成り立つ.

$$\mathbf{e}_{ts} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{e}_{ns} = 0 \text{ at } y = h \quad (16)$$

$$\mathbf{e}_{ns} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{e}_{ns} = 0 \text{ at } y = h \quad (17)$$

ここで \mathbf{e}_{ts} および \mathbf{e}_{ns} はそれぞれ水面に対して接線方向および法線方向の単位ベクトルである.

また応力テンソル \mathbf{T} は次の式で表すことができる.

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} -p + \tau_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & -p + \tau_{yy} \end{bmatrix} \quad (18)$$

底面では流速の x および y 方向成分はゼロとなる. 従って, 以下の式が成り立つ.

$$u = 0 \text{ at } y = 0 \quad (19)$$

$$v = 0 \text{ at } y = 0 \quad (20)$$

底面の境界層は植生層内および植生層上の不安定さにはほとんど影響しない. よってここでは, 計算を単純化するために式(19)の代わりに, 滑り速度 ϕ を用いた以下の境界条件を用いる.

$$u = \phi \text{ at } y = 0 \quad (21)$$

植生層の境界面($y = h_c$)では, 領域Aと領域Cのせん断力の水面に対して接線方向および法線方向成分が一致する. したがって次の式が成り立つ.

$$\mathbf{e}_{ts} \cdot \mathbf{T}_a \cdot \mathbf{e}_{ns} = \mathbf{e}_{ts} \cdot \mathbf{T}_c \cdot \mathbf{e}_{ns} \text{ at } y = h_c \quad (22)$$

$$\mathbf{e}_{ns} \cdot \mathbf{T}_a \cdot \mathbf{e}_{ns} = \mathbf{e}_{ns} \cdot \mathbf{T}_c \cdot \mathbf{e}_{ns} \text{ at } y = h_c \quad (23)$$

なお上記の式は領域Aの記号の添え字を a , 領域Cの記号の添え字を c としており, 以降の式も同様にする.

また植生層の境界面では領域Aと領域Cの流速の x および y 方向成分が一致する. したがって次の式が成り立つ.

$$u_a = u_c \text{ at } y = h_c \quad (24)$$

$$v_a = v_c \text{ at } y = h_c \quad (25)$$

4. 漸近展開

次式で表される漸近展開を導入する.

$$\psi(x, y, t) = \psi_0(y) + A\psi_1(y)e^{i(kx-\omega t)} \quad (26)$$

$$p(x, y, t) = p_0(y) + Ap_1(y)e^{i(kx-\omega t)} \quad (27)$$

$$h(x, t) = h_0 + Ah_1e^{i(kx-\omega t)} \quad (28)$$

ここで A および k , ω はそれぞれ擾乱の振幅および波数, 角周波数である. 時間モードの線形安定解析の場合, 角周波数 ω を複素数と仮定する. この場合, ω の虚部 $\text{Im}[\omega]$ が擾乱の成長率を表しており, 実部 $\text{Re}[\omega]$ が実角周波数を表している.

上式を式(11)-(13)に代入して A のオーダーで整理する. このとき $O(I)$ において得られる方程式は流れの基本状態を表している. このとき, 各変数は次のように表される.

$$(\psi, h, h_c, h_B, p) = (\psi_0, h_0, 1, h_{B0}, p_0) \quad (29)$$

$O(I)$ において得られる方程式を領域ごとに次に示す.

領域A:

$$\begin{aligned} 1 + \frac{\kappa^2(y - h_{B0})}{h_{B0} - h_0} \{ (3y - h_{B0} - 2h_0)(\psi''_{a0})^2 \\ + 2(y - h_{B0})(y - h_0)\psi''_{a0}\psi'''_{a0} \} = 0 \end{aligned} \quad (30)$$

$$\frac{1}{S} + p'_{a0} = 0 \quad (31)$$

領域 C :

$$1 - \alpha(\psi'_{c0})^2 + \frac{2d_r^2}{\gamma^2} \psi''_{c0} \psi'''_{c0} = 0 \quad (32)$$

$$\frac{1}{S} + p'_{c0} = 0 \quad (33)$$

式(30)(32)を境界条件を用いて数値的に解くと基本状態における流速分布が得られる。また、式(31)(33)を境界条件を用いて解くと、次のような圧力分布を表す式が得られる。

$$p_0(y) = \frac{1}{S}(h_0 - y) \quad (34)$$

$O(A)$ において、式(11)-(13)から次の式が得られる。

領域 A :

$$\begin{aligned} Q_a^\psi(y)\psi_{a1}(y) + Q_a^p(y)p_{a1}(y) + Q_a^{h_1}(y)h_1 \\ + Q_a^{h_{B1}}(y)h_{B1} = 0 \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_a^\psi(y)\psi_{a1}(y) + \mathcal{R}_a^p(y)p_{a1}(y) + \mathcal{R}_a^{h_1}(y)h_1 \\ + \mathcal{R}_a^{h_{B1}}(y)h_{B1} = 0 \end{aligned} \quad (36)$$

$$S_a^\psi(y)\psi_{a1}(y) + S_a^{h_1}(y)h_1 + S_a^{h_{B1}}(y)h_{B1} = 0 \quad (37)$$

領域 C :

$$Q_c^\psi(y)\psi_{c1}(y) + ikp_{c1}(y) = 0 \quad (38)$$

$$\mathcal{R}_c^\psi(y)\psi_{c1}(y) + \frac{\partial p_{c1}}{\partial y} = 0 \quad (39)$$

$$S_c^\psi(y)\psi_{c1}(y) = 0 \quad (40)$$

自由表面を持つ流れの場合、圧力の境界条件を導くためには $y = h_0, h_{c0}$ における圧力の情報を必要とするため、式(35)(38)が必要となる。これらの式を用いれば $p_{a1}(y)$ および $p_{c1}(y)$ は次のように表せる。

$$p_{a1}(y) = T_a^\psi(y)\psi_{a1}(y) + T_a^{h_1}(y)h_1 + T_a^{h_{B1}}(y)h_{B1} \quad (41)$$

$$p_{c1}(y) = T_c^\psi(y)\psi_{a1}(y) \quad (42)$$

ここで、 Q^j および $\mathcal{R}^j, S^j, T^j (j = \psi, p, h_1, h_{B1})$ は線形演算子であり、スペースの関係から具体的な形については省略する。

5. 数値解法

$O(A)$ における摂動問題は流関数の摂動量 ψ_1 を Chebyshev 多項式 T_i を用いて領域ごとに展開して数値的に解く。

$$\text{領域 A: } \psi_{a1}(y) = \sum_i^N a_i T_{ai} \left(\frac{2(y-1)}{h_0-1} - 1 \right) \quad (43)$$

$$\text{領域 C: } \psi_{c1}(y) = \sum_i^N a_{i+N+1} T_{ci} (2y-1) \quad (44)$$

ここで a_i は Chebyshev 多項式のそれぞれの項の係数であり、支配方程式や境界条件によって決定される未知数である。また N は Chebyshev 多項式の項数であり、本研究

の解析ではそれ以上増加させても結果がほとんど変化しない $N=40$ を用いる。式(37)および(40)に式(43)および(44)をそれぞれ代入し、それを Gauss-Laobatto 点で評価する。Gauss-Lobatto 点を定義する式を領域ごとに以下に示す。

領域 A :

$$y_{ai} = \frac{\left(\cos \frac{i\pi}{N} + \frac{h_0-1}{2} \right) (h_0-1)}{2} - 1 \quad (44)$$

領域 C :

$$y_{ci} = \frac{\cos \frac{i\pi}{N} + 1}{2} \quad (45)$$

$$(i = 0, 1, 2, \dots, N)$$

すると領域ごとに $N+1$ 個の線形代数方程式群が得られる。

領域 A : 式番号(46)

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{L}_{a0}(y_{a0})a_0 + \mathcal{L}_{a1}(y_{a0})a_1 + \dots + \mathcal{L}_{aN}(y_{a0})a_N = 0 \\ \mathcal{L}_{a0}(y_{a1})a_0 + \mathcal{L}_{a1}(y_{a1})a_1 + \dots + \mathcal{L}_{aN}(y_{a1})a_N = 0 \\ \dots \dots \dots \\ \mathcal{L}_{a0}(y_{aN})a_0 + \mathcal{L}_{a1}(y_{aN})a_1 + \dots + \mathcal{L}_{aN}(y_{aN})a_N = 0 \end{aligned} \right\}$$

領域 C : 式番号(47)

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{L}_{c0}(y_{c0})a_{41} + \mathcal{L}_{c1}(y_{c0})a_{42} + \dots + \mathcal{L}_{cN}(y_{c0})a_{2N+1} = 0 \\ \mathcal{L}_{c0}(y_{c1})a_{41} + \mathcal{L}_{c1}(y_{c1})a_{42} + \dots + \mathcal{L}_{cN}(y_{c1})a_{2N+1} = 0 \\ \dots \dots \dots \\ \mathcal{L}_{c0}(y_{cN})a_{41} + \mathcal{L}_{c1}(y_{cN})a_{42} + \dots + \mathcal{L}_{cN}(y_{cN})a_{2N+1} = 0 \end{aligned} \right\}$$

境界条件からは次式が得られる

$$a_0 + a_1 + \dots + a_N + \mathcal{M}_a h_1 = 0 \quad (48)$$

$$\mathcal{N}_{a0}(h_0)a_0 + \dots + \mathcal{N}_{aN}(h_0)a_N + \mathcal{O}_a h_1 = 0 \quad (49)$$

$$T'_{c0}(0)a_{41} + T'_{c1}(0)a_{42} + \dots + T'_{cN}(0)a_{2N+1} = 0 \quad (50)$$

$$T_{c0}(0)a_{41} + T_{c1}(0)a_{42} + \dots + T_{cN}(0)a_{2N+1} = 0 \quad (51)$$

$$T'_{a0}(1)a_0 + \dots + T'_{aN}(1)a_{N+1} - (T'_{c0}(1)a_{41} + \dots + T'_{cN}(1)a_{2N+1}) = 0 \quad (52)$$

$$\mathcal{P}_{a0}(1)a_0 + \dots + \mathcal{P}_{aN}(1)a_{N+1} - (\mathcal{P}_{c0}(1)a_{41} + \dots + \mathcal{P}_{cN}(1)a_{2N+1}) = 0 \quad (53)$$

ここで $\mathcal{L}_i, \mathcal{M}_i, \mathcal{N}_i, \mathcal{O}_i, \mathcal{P}_i$ は線形演算子でありスペースの関係から具体的な形については省略する。

式(46)の最初の1行および最後の行はそれぞれ水面および植生層の境界面近傍で評価された支配方程式(13)である。また、式(47)の最初の2行および最後の行は植生層の境界面および底面近傍で評価された式(13)である。これらの代わりに境界条件(48)-(53)を用いると $2N+3$ 個の代数方程式が得られる。それらを行列の形で書き表す。

$$\mathbb{L} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{0} \quad (54)$$

行列 \mathbb{L} および \mathbf{a} の具体的な形はスペースの関係から省略する。式(54)が自明でない解を持つための条件は、次式で表される。

$$|\mathbb{L}| = 0 \quad (55)$$

上式を解くと次のような形の解が得られる。

$$\omega = \omega(k, S; \alpha) \quad (56)$$

6. 結果と考察

本研究で求めた流速分布および安定性ダイアグラムをそれぞれ図-2および図-3に示す。すべての結果において、 α 以外のパラメーターは Poggi ら²⁾の実験で用いられたパラメーターと同様の以下のものを用いた。

$$H_0 = 5, h_{c0} = 1, d_r = 0.3333 \dots, \kappa = 0.4, \gamma = 0.21$$

まず図-2 の基本状態の流速分布に着目する。 α の値を変化させ3つの流速分布を示したが、いずれの場合においても、清水ら¹⁾の研究で示された流速分布の特徴と一致している。領域Aでは通常の壁面乱流と同様の下に凸な形の流速分布となり、領域Cでは領域Aの早い流速に引っ張られ上に凸な形の流速分布となっている。境界面において流速の形が変化していることから境界面付近で流れの変曲点が生じていることがわかる。 α の値が大きくなるほど領域Aおよび領域Cともに流速が小さくなっており、植生層の密度が大きくなるほど流体の疎通能力が低下することがわかる。

次に図-3 の安定性ダイアグラムに着目する。前述したとおり複素角周波数 ω の虚部 $\text{Im}[\omega]$ が擾乱の成長率を表している。解析で得られた $\text{Im}[\omega]$ の $k-S$ 平面におけるコンタを描いたのが図-5である。図中では正のコンタのみが描かれており、コンタ上の数字が成長率 $\text{Im}[\omega]$ の値である。このダイアグラムによって、設定した植生密度 α に応じて、不安定領域が発生する勾配 S の範囲がわかる。また α の値ごとに安定性ダイアグラムを比較すると、 α の値が大きくなるほど不安定領域が小さくなっており $\alpha=0.883$ の場合が最も不安定領域が小さい。 $\alpha=0.883$ の場合の流速分布に着目すると、領域C内の流速がほぼ一定となっている。これらのことから、植生層の密度が大きくなり植生層内の流速が一定となると、不安定領域の発生する範囲が小さくなることがわかる。これは植生層内の流速が一定となると植生層内の流れが安定し、不安定性の原因であるケルビン・ヘルムホルツ不安定性による乱れの影響範囲が小さくなるためであると考えられる。

7. 結論

本研究により植生層を有する開水路流に関して数値解析を行い、流速分布および、波数と底面勾配、植生の抵抗のパラメーター α における安定性ダイアグラムを得た。植生層を有する開水路流は、植生層の境界面において流

れの変曲点が発生すること、および植生層の密度が大きくなると植生層内の流速がほぼ一定となることが確認された。また、植生層の密度が大きい場合は不安定領域が小さくなることが確かめられたことから、植生層の存在が必ずしも流れの不安定性を発生させるわけではないことが示唆された。

本論文では植生の密度によって流れがどのように変化するかを検討した。植生高さおよびレイノルズ数など、そのほかのパラメーターが植生を有する開水路流に与える影響を検討することが今後の課題としてあげられる。

参考文献

- 1) 清水義彦, 辻本哲郎, 中川博次, 北村忠紀: 直立性植生層を伴う流れ場の構造に関する実験的研究, 土木学会論文集 No.438, pp.31-40, 1991.
- 2) Poggi, D., Porporato, A., Ridolfi, L., Albertson, J. D., G. G.: The effect of vegetation density on canopy sub-layer turbulence, Boundary-Layer Methorology, 111(3), pp.565-587, 2004.
- 3) Heidi M Nepf.: Flow and Transport in Regions with Aquatic Vegetation, Annual Review of Fluid Mechanics, Vol44, pp.123-142, 2012.

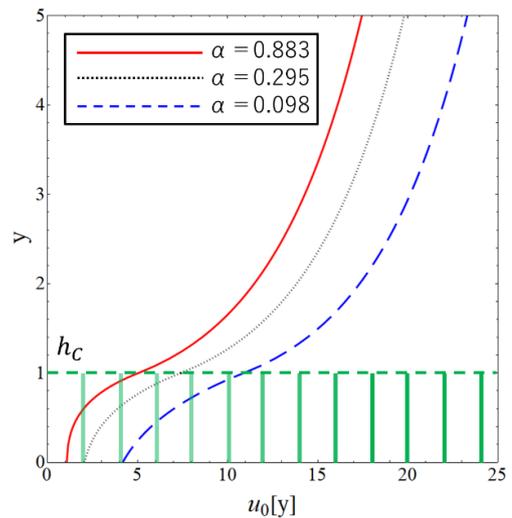


図-2 植生層を有する開水路流の基本状態の流速分布

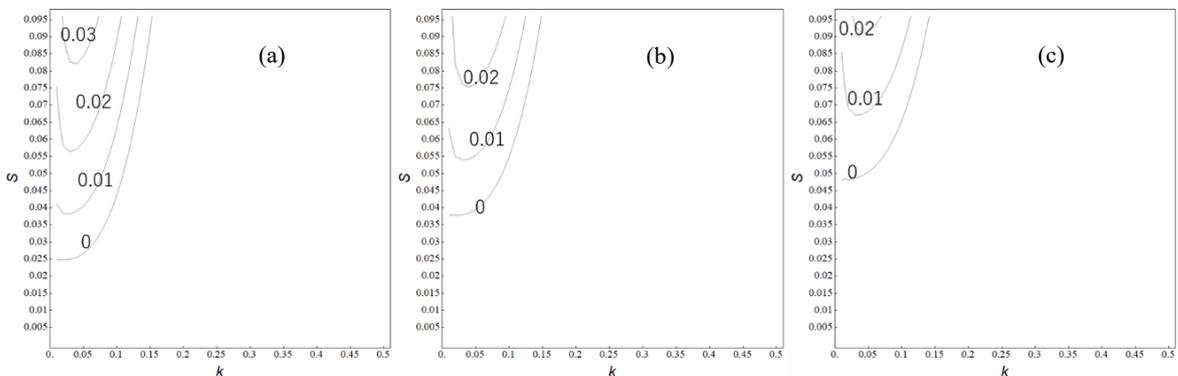


図-3 $\text{Im}[\omega]$ の $k-S$ 平面におけるコンタ (a) $\alpha = 0.049$, (b) $\alpha = 0.295$, (c) $\alpha = 0.883$