B－26　平成29年度　土木学会北海道支部　論文報告集　第74号

自由表面流におけるソフトモード不安定の弱非線形安定解析

Weakly nonlinear stability analysis of the softmode instability of free surface flow

北海道大学大学院工学院　○学生員　久原愛加(Aika Hisahara)
北海道大学大学院工学研究院助教　正員　Adriano Coutinho de Lima
北海道大学大学院工学研究院教授　正員　泉典洋(Norihiro Izumi)

1. はじめに

流体力学の分野において，層流の不安定性および乱流遷移に関する問題は古くから研究の対象とされており，基本流に対して加えられた摂動について線形化を行う流体力学的安定性の理論解析の方法が1960年代までは特に多く使用されてきた．また1960年代以降は微小摂動の主な非線形効果を取り入れる弱非線形理論も盛んに行われている[1)2)]．

自由表面流の安定性について，Benjamin[3)]，Yih[4)]による研究をはじめとして数多くの研究がされてきた．その中で，Lin[5)]は自ら求めた自由表面流の安定性ダイアグラムにおいて二つの不安定領域の存在を指摘している．波数の小さい領域の不安定モードをソフトモード，波数の大きい領域の不安定モードをハードモードと呼び，前者を水面波擾乱，後者を乱流遷移と関連付けている．

泉･リマ[6)]による自由表面流の線形安定解析では，Navier-Stokes方程式に微小擾乱を与えて2次以上の擾乱の積を無視することで線形化を行った．ノーマルモードリダクションを行った方程式であるOrr-Sommerfeld方程式を自由表面流れに対応した境界条件の下で解くことで詳細な安定性ダイアグラムを示した．彼らは擾乱の増幅率をk-Re空間(kは波数)におけるコンタに描いた．その結果，底面勾配が小さくなると消失する不安定領域が，波数の小さい領域に現れた．彼らはこれを重力による水面の復元力による影響と考えた．またこの領域での不安定性が水面波に関連するソフトモードであると推測し，部分的にLin[5)]の予測を支持する結果であるとしている．

本研究では，ソフトモードである波数がゼロの近傍での臨界Reynolds数付近の分岐形態についてより詳細に調べるため，泉･リマ[6)]の行った線形安定解析と同様の解析を行い，その結果からわかるソフトモードでの中立点の臨界Reynolds数を用いて弱非線形安定解析を行う．

2. 定式化

2.1. 支配方程式

2次元の自由表面流はNavier-Stokes方程式と連続式により次のように表すことができる．

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{t}}+\tilde{u}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}}+\tilde{v}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}}+gS+\nu\left(\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{x}^2}+\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2}\right) \tag{1}$$

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{t}}+\tilde{u}\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{x}}+\tilde{v}\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{y}}-g+\nu\left(\frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{x}^2}+\frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{y}^2}\right) \tag{2}$$

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}}+\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} = 0 \tag{3}$$

ここで$\tilde{t}$は時間，$\tilde{x}$および$\tilde{y}$はそれぞれ流れ方向および水深方向の座標，$\tilde{u}$および$\tilde{v}$はそれぞれ流速の$\tilde{x}$および$\tilde{y}$方向成分，$\tilde{p}$は圧力，νは動粘性係数，gは重力加速度，ρは水の密度，Sは底面勾配を表している．

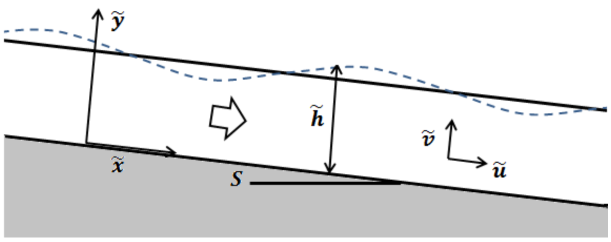

図 - 1　概略図

2.2. 境界条件

水面と底面における境界条件は次のように表される．

$$\frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{t}}+\tilde{u}\frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{x}} = \tilde{v} \text{ at } \tilde{y}=\tilde{h}(\tilde{x},\tilde{t}) \tag{4}$$

$$\vec{e}_{\mathrm{ts}}\cdot\vec{\vec{T}}\cdot\vec{e}_{\mathrm{ns}} = 0 \text{ at } \tilde{y}=\tilde{h}(\tilde{x},\tilde{t}) \tag{5}$$

$$\vec{e}_{\mathrm{ns}}\cdot\vec{\vec{T}}\cdot\vec{e}_{\mathrm{ns}} = 0 \text{ at } \tilde{y}=\tilde{h}(\tilde{x},\tilde{t}) \tag{6}$$

$$\tilde{u} = 0 \text{ at } \tilde{y}=0 \tag{7}$$

$$\tilde{v} = 0 \text{ at } \tilde{y}=0 \tag{8}$$

ここで，$\vec{e}_{\mathrm{ts}}$および$\vec{e}_{\mathrm{ns}}$はそれぞれ接線方向および法線方向の単位ベクトルであり，$\vec{\vec{T}}$は応力テンソルを表す．

2.3. 無次元化

ここで$\tilde{h}_0$および$\tilde{u}_0$をそれぞれ基準等流状態における水深および流速とすると，基準等流状態における平均流速$\tilde{u}_a$は次のように表される．

$$\tilde{u}_a=\frac{1}{\tilde{h}_0}\int_0^{\tilde{h}_0}\tilde{u}_0 d\tilde{y}=\frac{gS\tilde{h}_0^2}{3\nu} \tag{9}$$

上式を用いて無次元化されたNavier-stokes方程式と連続式は次のように表される．

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{3}{R}+\frac{1}{R}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \tag{10}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y}-\frac{3}{SR}+\frac{1}{R}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) \tag{11}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{12}$$

ここでRはReynolds数であり，次式で定義される．

$$R = \frac{\tilde{u}_a\tilde{h}_0}{\nu} \tag{13}$$

2.4. 流れ関数の導入

次のように定義される流れ関数ψを導入する．

$$(u,v)=\left(\frac{\partial \psi}{\partial y},-\frac{\partial \psi}{\partial x}\right) \tag{14}$$

するとNavier-Stokes方程式(10),(11)は以下のように表され，これらの式は流れ関数の導入により連続式(12)を満たしている．

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial y\partial t}-\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}=-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{1}{R}\left(3+\frac{\partial^3\psi}{\partial x^2\partial y}+\frac{\partial^3\psi}{\partial y^3}\right) \quad (15)$$

$$-\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial t}+\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}-\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}=-\frac{\partial p}{\partial y}-\frac{1}{R}\left(\frac{3}{S}+\frac{\partial^3\psi}{\partial x^3}+\frac{\partial^3\psi}{\partial x\partial y^2}\right) \quad (16)$$

上記2式より圧力項を消去すると次の式が得られる．

$$\frac{\partial\nabla^2\psi}{\partial t}-\frac{\partial\psi}{\partial x}\cdot\frac{\partial\nabla^2}{\partial y}+\frac{\partial\psi}{\partial y}\cdot\frac{\partial\nabla^2}{\partial x}-\frac{1}{R}\nabla^2\nabla^2\psi=0 \quad (17)$$

ここで∇^2はラプラシアンであり，次のように表される．

$$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (18)$$

3.　線形安定解析

3.1.　漸近展開

線形安定解析では擾乱の振幅を微小パラメータとして線形化を行う．基本流に対して流れ方向の擾乱を導入すると，流れ関数ψ，圧力pおよび水深hは次のように漸近展開することができる．

$$\psi(x,y,t) = \psi_0(y)+A\psi_1(y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)} \quad (19)$$

$$p(x,y,t) = p_0(y)+Ap_1(y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)} \quad (20)$$

$$h(x,t) = 1+Ah_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)} \quad (21)$$

ここでA，kおよびωはそれぞれ擾乱の振幅，波数および角周波数である．時間モードの線形安定解析では角周波数ωを複素数と仮定する．また，振幅Aを無限小であると仮定し，$O(A^2)$の項を無視する．

3.2.　$O(1)$

上記の式を式(15)-(16)に適用して境界条件の下で解くと次のような解が得られる．

$$p_0(y) = -\frac{3}{RS}(y-1) \quad (22)$$

$$\psi_0(y) = \frac{1}{2}\left(3y^2-y^3\right) \quad (23)$$

3.3.　$O(A)$

$O(A)$を数値的に解くため，Chebyshev多項式を用いてスペクトル法を導入する．流れ関数の摂動量ψ_1をChebyshev多項式T_nで次のように展開する．

$$\psi_1(y)=\sum_{n=0}^{N}a_nT_n(2y-1) \quad (24)$$

ここで，T_nは$T_n(\cos\theta)\equiv\cos(n\theta)$で定義され，$a_n$ $(n=0,1,...,N)$はChebyshev多項式の各項の係数を表す未知数である．

また，yについて次式で表されるGauss-Lobatto点で評価すると$O(A)$の式からN個の代数方程式が得られる．これを行列の形で書くと式(26)のようになる．

$$y_j=\frac{\cos(j\pi/N)+1}{2} \qquad (j=0,1,...,N) \quad (25)$$

$$\mathcal{A}\begin{bmatrix}a_0\\a_1\\ \vdots\\a_{N-1}\\a_N\\h_1\end{bmatrix}=0 \quad (26)$$

式(26)の最初と最後の二行はそれぞれ水面および底面近くで評価されているので，これらの代わりに$p_1(1)$を消去した境界条件を用いた次の線形代数方程式を考える．

$$\mathcal{M}\begin{bmatrix}a_0\\a_1\\ \vdots\\a_{N-1}\\a_N\\h_1\end{bmatrix}=0 \quad (27)$$

ここで$\mathcal{M}$はN+1次の正方行列であり，この式(27)が自明でない解を持つためには，可解条件$|\mathcal{M}|=0$が成立する必要があることから，次のような一般的な形で表される複素各周波数ωが得られる．

$$\omega=\omega(k;R,S) \quad (28)$$

この複素角周波数ωの虚部が摂動の成長率を表す．

弱非線形安定解析では，線形安定解析から得られる安定性ダイアグラム図-2におけるソフトモードでの臨界Reynolds数を用いて，中立点付近での解の分岐形態について調べる．

4.　弱非線形安定解析

4.1.　摂動展開

線形安定解析でのソフトモードの中立点近傍における解の挙動を調べるため，臨界Reynolds数からわずかに不安定領域側にずれている場合を考え，ζを用いて展開する．

$$\zeta^2\equiv\frac{1}{R_c}-\frac{1}{R} \quad (29)$$

このとき$|R-R_c|\ll 1$であり，ζは展開のパラメータである．臨界Reynolds数からζ^2だけずれた領域では，擾乱の増幅率もζ^2のオーダーであると考えられる．したがって振幅の変化する時間もζ^{-2}のオーダーになる．そこで次のような時間変数を導入する．

$$t=t_0,\, t_1=\zeta^2 t \quad (30)$$

これらの変換により時間微分は次のように表される．

$$\frac{\partial}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t_0}+\zeta^2\frac{\partial}{\partial t_1} \quad (31)$$

また，ここで次の変数変換を導入する．

$$\eta=\frac{y}{h} \quad (32)$$

線形安定解析では擾乱の振幅Aを微小パラメータとして線形化を行ったが，弱非線形安定解析ではζを展開の微小パラメータとして次のように各変数を展開し，ζ^3のオーダーまでの解からLandau方程式を導く[7]．

$$\psi(x,\eta,t,\tau) = \psi_{0,c}(\eta)+\sum_{i=1}^{3}\zeta^i\hat{\psi}_i(x,\eta,t,\tau) \quad (33)$$

$$p(x,\eta,t,\tau) = p_{0,c}(\eta)+\sum_{i=1}^{3}\zeta^i\hat{p}_i(x,\eta,t,\tau) \quad (34)$$

$$h(x,t,\tau) = 1+\sum_{i=1}^{3}\zeta^i\hat{h}_i(x,t,\tau) \quad (35)$$

ここで$\psi_{0,c}$および$p_{0,c}$は$R=R_c$での基本状態を示す．

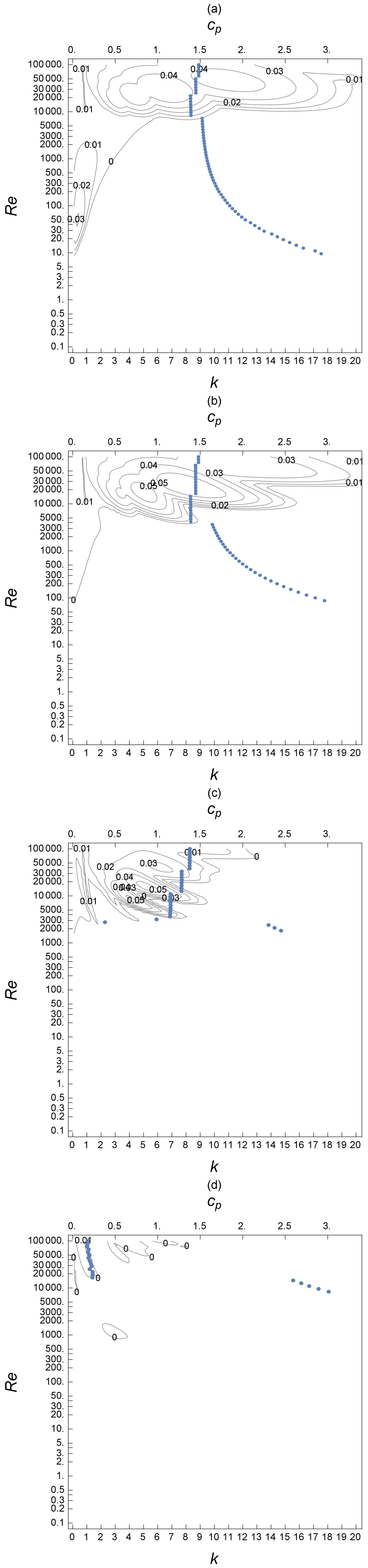

図 - 2　k-Re空間における摂動の増幅率Im$[\omega]$および Reynolds数に対して最大の増幅率におけるRe-C_p図 (a)S=0.1,(b)S=0.01,(c)S=0.001(d)S=0.0001

4.2.　$O(1)$の解

式(29)-(35)を用いて支配方程式(10)-(12)を展開し，$O(1)$において境界条件の下で解くと次の解が得られる．

$$\psi_{0,c}(\eta) = \frac{1}{2}\left(3\eta^2 - \eta^3\right) \tag{36}$$

$$p_{0,c}(\eta) = -\frac{3}{R_c S}(\eta - 1) \tag{37}$$

4.3.　$O(\zeta)$の解

基本擾乱の形を次のように仮定し，$O(\zeta)$の式に代入する．

$$\hat{\psi}_1(x,\eta,t,\tau) = A(\tau)\psi_{11}(\eta)E + \mathrm{c.c.} \tag{38}$$

$$\hat{p}_1(x,\eta,t,\tau) = A(\tau)p_{11}(\eta)E + \mathrm{c.c.} \tag{39}$$

$$\hat{h}_1(x,t,\tau) = A(\tau)h_{11}E + \mathrm{c.c.} \tag{40}$$

ここで$E = e^{i(k_c x - \omega_c t)}$であり，c.c.は直前の項の複素共役を表し，$k_c$および$\omega_c$は臨界Reynolds数に対応する波数および角振動数である．得られた微分方程式系からp_{11}を消去する．また，Chebyshev多項式で展開し，Gauss-Lobatto点で評価することでψ_{11}について数値的に解く．

4.4.　$O\left(\zeta^2\right)$の解

$O\left(\zeta^2\right)$での微分方程式系は次のような形の解を持つと考えられる．

$$\hat{\psi}_2(x,\eta,t,\tau) = A(\tau)^2\psi_{22}(\eta)E^2 + \mathrm{c.c.} + A(\tau)A(\tau)^*\psi_{20}(\eta) \tag{41}$$

$$\hat{p}_2(x,\eta,t,\tau) = A(\tau)^2 p_{22}(\eta)E^2 + \mathrm{c.c.} + A(\tau)A(\tau)^* p_{20}(\eta) + p_{00}(\eta) \tag{42}$$

$$\hat{h}_2(x,t,\tau) = A(\tau)^2 h_{22}E^2 + \mathrm{c.c.} + A(\tau)A(\tau)^* h_{20} \tag{43}$$

式(41)-(43)を$O\left(\zeta^2\right)$の式に代入し，AおよびA^*を含まない項および境界条件よりp_{00}について解く．また，A^2A^*を持つ項の係数から得られた微分方程式系をChebyshev多項式で展開し，Gauss-Lobatto点で評価することで$\psi_{22}, p_{22}, h_{22}$について数値的に解く．さらに，$AA^*$を含む項の係数から得られる微分方程式系から，$\psi_{20}, p_{20}, h_{20}$を解析的に解くことができる．

4.5.　$O\left(\zeta^3\right)$の解

$O\left(\zeta^3\right)$での微分方程式系は次のような解の形を持つと考えられる．

$$\hat{\psi}_3(x,\eta,t,\tau) = A(\tau)^3\psi_{33}(\eta)E^3 + \mathrm{c.c.} + \psi_{31}(\eta,\tau)E + \mathrm{c.c.} \tag{44}$$

$$\hat{p}_3(x,\eta,t,\tau) = A(\tau)^3 p_{33}(\eta)E^3 + \mathrm{c.c.} + p_{31}(\eta,\tau)E + \mathrm{c.c.} \tag{45}$$

$$\hat{h}_3(x,t,\tau) = A(\tau)^3 h_{33}E^3 + \mathrm{c.c.} + h_{31}(\tau)E + \mathrm{c.c.} \tag{46}$$

式(44)-(46)を$O\left(\zeta^3\right)$の式に代入し，Eを含みE^3を含まない項の係数から得られる微分方程式系から，p_{31}について解く．また，ψ_{31}についてChebyshev多項式を用いて展開し，Gauss-Lobatto点で評価することで次のような線形代数方程式が得られる．

$$\mathcal{M}_{11}\begin{bmatrix} a_{31,0}(\tau) \\ a_{31,1}(\tau) \\ \vdots \\ a_{31,N}(\tau) \\ h_{31}(\tau) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{31,0}(\tau) \\ f_{31,1}(\tau) \\ \vdots \\ f_{31,N}(\tau) \\ f_{31,N+1}(\tau) \end{bmatrix} \tag{47}$$

ここで式(47)の可解条件は，$\mathcal{M}_{11}$の任意の1列を右辺と置き換えた行列の行列式がゼロとなることである．このことから次の式が得られる．

$$\frac{dA}{d\tau} = \lambda_0 A + \lambda_1 |A|^2 A \tag{48}$$

表 - 1　臨界Reynolds数とLandau定数

S	k_c	R_c	$\mathrm{Re}[\lambda_0]$	$\mathrm{Re}[\lambda_1]$
0.1	0.0019	8.29	2.98×10^{-4}	-37.5
0.08	0.0016	10.38	3.31×10^{-4}	-41.6
0.06	0.0024	13.86	1.33×10^{-4}	-45.0
0.04	0.0023	20.83	2.74×10^{-3}	-36.6
0.02	0.0010	41.66	2.08×10^{-3}	-140.6
0.01	0.0016	83.33	2.06×10^{-3}	-141.9
0.008	0.0018	104.16	3.94×10^{-2}	-113.7
0.006	0.0008	138.86	1.44×10^{-2}	-21.8
0.004	0.0006	208.33	1.82×10^{-2}	-170.2
0.002	0.0010	416.65	1.54×10^{-2}	339.4
0.001	0.0013	833.31	4.16×10^{-1}	1832.2
0.0008	0.0010	1041.63	4.06×10^{-1}	-4655.2
0.0006	0.0005	1389.04	2.92×10^{-1}	3164.8
0.0004	0.0005	2083.27	4.06×10^{-1}	-10103.3
0.0002	0.0005	4168.17	5.39×10^{-1}	0
0.0001	0.0005	8342.87	6.23×10^{-1}	-46719.4

5.　結果および考察

5.1.　線形安定解析

線形安定解析の結果から図-2の安定性ダイアグラムが得られた．コンタ上の数字が増幅率Im[ω]の値であり，正の増幅率のみが描かれている．さらに増幅率Im[ω]が最大となるReynolds数での位相速度の値C_pを図-2上にプロットしている．この安定性ダイアグラムの形状から，複数の不安定領域が複雑に存在していることがわかる．波数の大きい領域に広がる複数の不安領域が存在しており，これはハードモードであると考えられている．図の位相速度のプロットから，ハードモードではそれぞれの不安定モードで位相速度Reynolds数に対して一定である．一方で，波数が小さい領域に勾配が小さくなると消失する不安定領域が存在し，この部分がソフトモードであり水面波擾乱であると考えられ，ソフトモードにおいて位相速度はReynolds数が小さくなるに従って大きくなっていることがわかる．

5.2.　弱非線形安定解析

弱非線形安定解析で得られた式(48)は振幅の時間発展を表す．式中λ_0は線形増幅率に相当し，λ_1は第一Landau定数である．式(48)の平衡解は$\sqrt{-\mathrm{Re}[\lambda_0]/\mathrm{Re}[\lambda_1]}$と表される．$\mathrm{Re}[\lambda_0] > 0$の領域において，$\mathrm{Re}[\lambda_1] < 0$のとき，平衡解が存在する超臨界分岐となる．また$\mathrm{Re}[\lambda_1] > 0$のとき，$\mathrm{Re}[\lambda_0] < 0$の領域において平衡解を持つ亜臨界分岐となる[8]．

表-1は，線形・弱非線形安定解析によって得られた臨界Reynolds数およびLandau定数を示している．線形安定解析によって得られた安定性ダイアグラムにおいて波数がゼロの近傍での臨界Reynolds数付近におけるλ_0およびλ_1を求めた．表より，勾配が0.004以上の範囲ではいずれも$\mathrm{Re}[\lambda_0] > 0$かつ$\mathrm{Re}[\lambda_1] < 0$で超臨界分岐となった．一方で勾配が0.004より小さい範囲においては$\mathrm{Re}[\lambda_1] > 0$で亜臨界分岐となる場合が混在している．勾配が大きい場合，波数が小さい領域では主として水面波擾乱である[5)6)]．この結果は，水面波擾乱の不安定は，層流から乱流へ突然遷移する平板Poiseuille流れ等の乱流遷移とは異なり，臨界Reynolds数を越えると徐々に平衡振幅を大きくするような遷移をすることを意味している．

6.　結論

線形安定解析によって得られた安定性ダイアグラムから，Lin[5)]や泉・リマ[6)]の予測の通り，複数の不安定モードの存在が確認できた．また，波数が小さい領域に存在することが知られるハードモードではそれぞれの不安定領域で位相速度はReynolds数に対して一定である一方で，ソフトモードでは，臨界Reynolds数に近づくにつれて位相速度が大きくなることがわかった．

弱非線形安定解析では，自由表面流におけるソフトモードでの臨界Reynolds数付近における解の分岐特性を明らかにした．その結果，ある値以上の勾配を持つ範囲においていずれも$\mathrm{Re}[\lambda_0] > 0$かつ$\mathrm{Re}[\lambda_1] < 0$となり超臨界分岐であった．勾配が大きい場合，波数がゼロの近傍での不安定モードはソフトモードであり[5)6)]水面波擾乱の不安定であることから，水面波擾乱の不安定性は超臨界分岐であり，臨界Reynolds数を超えると徐々に平衡振幅を増加させるような分岐形態であることが明らかとなった．

参考文献

1) 神部 勉, P.G.ドレイジン:流体力学 安定性と乱流 第1章 流体力学的安定性.

2) 巽　友正, 乱流の世紀, 第1章 乱流の発生, ながれ, **32**, 327–324, 2013.

3) Benjamin, T. B., Wave formation in laminar flow down an inclined plane, *Jour. Fluid Mech.*, **2**(6), 554–573, 1957.

4) Yih, C. S., Stability of liquid flow down an inclined plane, *Phys. Fluids*, **6**(3), 321–334, 1963.

5) Lin, S. P., Instability of a liquid film flowing down an inclined plane, *Phys. Fluids*, **10**(2), 308–313, 1967.

6) 泉 典洋, デ リマ アドリアーノ コーティニョ:自由表面流の安定性再考 ,土木学会論文集A2(応用力学), Vol. 70, No. 2 , pp.I_801-I_806, 2014.

7) Schmid, Peter J., and Dan S. Henningson. Stability and transition in shear flows. Vol. 142. Springer Science & Business Media, 2012.

8) 藤村薫; 水島二郎. 流れの弱非線形安定性理論. 日本物理学会誌, 1992, 47.10: 798-805.