

管水路内における気液二相流の線形安定解析

Linear stability analysis of air-water flow in a pipeline

北海道大学工学部環境社会工学科 ○学生員 谷川徹(Toru Tanigawa)
 北海道大学大学院工学研究院助教 正会員 Adriano Coutinho de Lima
 北海道大学大学院工学研究院教授 正会員 泉典洋(Norihito Izumi)

1. はじめに

豪雨下の下水道では、ポンプの排水が十分になされず下水道管内の流れの遮断、空気圧の上昇が発生し流体が逆流する。この現象は水撃（ウォーターハンマー）と呼ばれ、流体、主に水の逆流によって水道管自体への損傷やマンホールの噴出といった二次災害が起こる原因となる。

管水路内の極端な圧力上昇は、跳水の急速な発生によって起こると考えられる。この際、管水路先端に達した跳水を水柱（water column）と呼ぶ。Valentin(1981)によると、水柱と水柱との間に閉じ込められた空気の圧縮と膨張により、流体の逆流が加速され高周波の過渡現象が引き起こされることが観測されている。

水撃が発生するメカニズムを説明するためPriessman's Slot Method, Shock-Fitting Approach, Rigid Water Column Approach¹⁾などが提案されてきた。しかし、過大な圧力を受けることで、どのように重力波から圧力波へ遷移するかの詳細な過程は未解明な部分が多い。そこで、本研究では既に明らかとされている開水路における層流の安定性解析のモデル²⁾を基に、管水路における気液二相流に対して線形安定解析を行うことで、従来のモデルの一般化を図ることを目的とする。また、管水路内での層流が形成する界面波の発生メカニズムを理論的に明らかにする。実際に居住地環境での下水道管内で水撃が発生する場合、水の流れは乱流であると推測されるが、今回は簡単のため水の流れは層流として解析した。

2. 定式化

2.1. 支配方程式

液相の水深を1とし、2次元の管水路内の液相（ $0 \leq y \leq 1$ ）の流れをNavier-Stokes方程式と連続式により以下のように表す。

$$\frac{\partial \vec{U}_w}{\partial t} + (\vec{U}_w \cdot \nabla) \vec{U}_w = -\frac{1}{\rho_N} \nabla p_w + \frac{\mu_N}{\rho_N Re} \nabla^2 \vec{U}_w + \frac{1}{S} \frac{12(-1+d+\mu_N)}{Re(-4+4d+\mu_N)} \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \vec{U}_w = 0 \quad (2)$$

ここで、 t は時間、 x および y はそれぞれ流れ方向および水深方向の座標、 $\vec{U}_w = ((u_w, v_w))$ は水の流速ベクトルを表す。 $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y)$ 、 $\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla$ 、 $\vec{S} = (1, -S)$ であり S は底面勾配、 d は管水路の代表高さ、 p_w は水にかかる圧力、 ρ_N および μ_N はそれぞれ空気の密度および粘性係数を表す。

また、気相（ $1 \leq y \leq d$ ）では運動方程式と連続式は次のように表される。

$$\frac{\partial \vec{U}_a}{\partial t} + (\vec{U}_a \cdot \nabla) \vec{U}_a = -\frac{\nabla p_a}{\rho_N} + \frac{\mu_N}{\rho_N Re} \nabla^2 \vec{U}_a \quad (3)$$

$$\nabla \cdot \vec{U}_a = 0 \quad (4)$$

ここで、 $\vec{U}_a = ((u_a, v_a))$ は空気の流速ベクトルを表し、 p_a は空気圧を表す。空気圧 p_a について、跳水の発生する地点の圧力水頭を z 、管水路の x 方向の長さを l として次のような式で表す。

$$-\frac{z}{l} + \frac{\partial p_a}{\partial x} = 0 \quad (5)$$

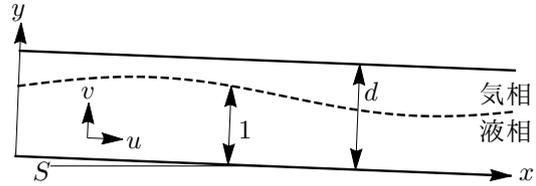


図-1 無次元化後の管水路内の気液二相流の概念図
 水面の底面からの高さが1となるように無次元化している。

S : 底面勾配 d : 管水路の代表高さ
 x : 流れ方向の座標 y : 水深方向の座標
 u : 流速の x 方向成分 v : 流速の y 方向成分

また、上式は既に次のような無次元化が行われている。

$$(\tilde{u}_a, \tilde{v}_a, \tilde{u}_w, \tilde{v}_w) = \tilde{u}_f (u_a, v_a, u_w, v_w) \quad (6)$$

$$(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{t}, \tilde{d}, \tilde{h}_0) = \tilde{h}_0 (x, y, l, d, 1) \quad (7)$$

$$\tilde{t} = \frac{\tilde{h}_0}{\tilde{u}_f} t \quad (8)$$

$$(\tilde{p}_a, \tilde{p}_w) = \tilde{\rho}_w \tilde{u}_f^2 (p_a, p_w) \quad (9)$$

$$(\tilde{\rho}_a, \tilde{\rho}_w) = \tilde{\rho}_w (\rho_N, 1) \quad (10)$$

$$(\tilde{\mu}_a, \tilde{\mu}_w) = \tilde{\mu}_w (\mu_N, 1) \quad (11)$$

ここで \tilde{h}_0 および \tilde{u}_w はそれぞれ基準等流状態での水深および水の x 方向の流速であり、平均流速 \tilde{u}_f は次のように表される。

$$\tilde{u}_f = \frac{1}{\tilde{h}_0} \int_0^{\tilde{h}_0} \tilde{u}_{w0} d\tilde{y} \quad (12)$$

また、 Re はReynolds数であり次式で表される。

$$Re = \frac{\tilde{u}_f \tilde{h}_0 \tilde{\rho}_w}{\tilde{\mu}_w} \quad (13)$$

2.2. 境界条件

管路上端（ $y = d$ ）の境界条件は

$$u_a(x, d, t) = 0 \quad (14)$$

$$v_a(x, d, t) = 0 \quad (15)$$

次に管水路下端（ $y = 0$ ）において、底面に対する接線方向および法線方向の流速成分はどちらもゼロとなり、以下の式が成り立つ。

$$u_w(x, 0, t) = 0 \quad (16)$$

$$v_w(x, 0, t) = 0 \quad (17)$$

ならびに気相-液相界面（ $y = 1$ ）における運動学的境界条件は次式で表される。

$$\frac{\partial h}{\partial t} + u_w \frac{\partial h}{\partial x} = v_w \text{ at } y = 1 \quad (18)$$

これに加え自由表面に働くせん断力が十分小さいと仮定すると、水面では接線方向および法線方向の応力がゼロとなり、次の式が成り立つ。

$$\vec{U}_a \cdot \vec{e}_{ts} - \vec{U}_w \cdot \vec{e}_{ts} = 0 \text{ at } y = 1 \quad (19)$$

$$\vec{U}_a \cdot \vec{e}_{ns} - \vec{U}_w \cdot \vec{e}_{ns} = 0 \text{ at } y = 1 \quad (20)$$

$$\vec{e}_{ts} \cdot \vec{T}_a \cdot \vec{e}_{ns} - \vec{e}_{ts} \cdot \vec{T}_w \cdot \vec{e}_{ns} = 0 \text{ at } y = 1 \quad (21)$$

$$\vec{e}_{ns} \cdot \vec{T}_a \cdot \vec{e}_{ns} - \vec{e}_{ns} \cdot \vec{T}_w \cdot \vec{e}_{ns} = 0 \text{ at } y = 1 \quad (22)$$

ここで、 \vec{e}_{ts} 、 \vec{e}_{ns} はそれぞれ気相-液相界面に対する法線および接線方向の単位ベクトル、 \vec{T} は応力テンソルであり、それぞれ次式で表される。

$$\vec{e}_{ts} = \frac{\left(1, \frac{\partial h(x,t)}{\partial x}\right)}{\left[1 + \left(\frac{\partial h(x,t)}{\partial x}\right)^2\right]^{1/2}} \quad (23)$$

$$\vec{e}_{ns} = \frac{\left(-\frac{\partial h(x,t)}{\partial x}, 1\right)}{\left[1 + \left(\frac{\partial h(x,t)}{\partial x}\right)^2\right]^{1/2}} \quad (24)$$

$$\vec{T}_i = \begin{bmatrix} -p_i + 2\mu_i \frac{\partial u_i}{\partial x} & \mu_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial y} + \frac{\partial v_i}{\partial x}\right) \\ \mu_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial y} + \frac{\partial v_i}{\partial x}\right) & -p_i + 2\mu_i \frac{\partial v_i}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (25)$$

添え字*i*は液相($i = w$)または気相($i = a$)を表す。空気流れの上流、下流での圧力の条件は次のようになる。

$$p_a(0, t) = 0 \quad (26)$$

$$p_a(l, t) = z \quad (27)$$

ただし今回は、外的要因による大気に対する圧力付加は無視するので式(27)に $z = 0$ を代入して解析する。

3. 漸近展開

気相-液相界面における波の発達について解析するため次の形で表される漸近展開を導入し、normal mode analysisを行う。

$$[\psi_a, \psi_w, p_a, p_w, h] = [\psi_{a0}, \psi_{w0}, p_{a0}, p_{w0}, 1] + A[\psi_{a1}, \psi_{w1}, p_{a1}, p_{w1}, h_1] e^{i(kx - \omega t)} \quad (28)$$

ここで A 、 k および ω はそれぞれ擾乱の振幅、波数および角周波数である。時間モードの線形安定解析では角周波数 ω を複素数と仮定する。また、振幅 A が微小であるとき線形安定解析では A^2 より高次の項を無視する。流関数 ψ_a 、 ψ_w は次のように定義される。

$$(u_a, v_a, u_w, v_w) = \left(\frac{\partial \psi_a}{\partial y}, -\frac{\partial \psi_a}{\partial x}, \frac{\partial \psi_w}{\partial y}, -\frac{\partial \psi_w}{\partial x} \right) \quad (29)$$

基本状態で、無次元化された支配方程式(1)-(5)を境界条件(14)-(22)の下で解くと次の解を得る。

$$\psi_{a0} = -\frac{3y(y-2d)}{4d + \mu_N - 4} \quad (30)$$

$$\psi_{w0} = -\frac{y^2((2y-3)\mu_N + 2(d-1)(y-3))}{4d + \mu_N - 4} \quad (31)$$

$$p_{a0} = 0 \quad (32)$$

$$p_{w0} = -\frac{12(y-1)(d + \mu_N - 1)}{SRe(4d + \mu_N - 4)} \quad (33)$$

4. 線形安定解析

気相において x 、 y 方向それぞれの運動方程式から圧力項を消去すると、 $O(A)$ において以下の方程式を得る。

$$P(y)\psi_{a1}(y) + Q(y)\psi_{a1}''(y) + R(y)\psi_{a1}^{(4)}(y) = 0 \quad (34)$$

液相において、同様に以下の方程式を得る。

$$S(y)\psi_{w1}(y) + T(y)\psi_{w1}''(y) + U(y)\psi_{w1}^{(4)}(y) = 0 \quad (35)$$

ここで、 P 、 Q 、 R 、 S 、 T および U は線形微分演算子であり、スペースの関係から具体的な形については省略する。

$O(A)$ における境界条件として次式が得られる。

$$\psi_{a1}'(d) = 0 \quad (36)$$

$$\psi_{a1}(d) = 0 \quad (37)$$

$$\psi_{w1}'(0) = 0 \quad (38)$$

$$\psi_{w1}(0) = 0 \quad (39)$$

$$h_1 \left(\frac{6(d-1)k}{4d + \mu_N - 4} - \omega \right) + k\psi_{w1}(1) = 0 \quad (40)$$

$$\psi_{a1}'(1) + \frac{6h_1(\mu_N - 1)}{4d + \mu_N - 4} - \psi_{w1}'(1) = 0 \quad (41)$$

$$\psi_{w1}(1) - \psi_{a1}(1) = 0 \quad (42)$$

$$k^2\psi_{a1}(1)\mu_N + \mu_N\psi_{a1}''(1) + \frac{12h_1(d + \mu_N - 1)}{4d + \mu_N - 4} - k^2\psi_{w1}(1) - \psi_{w1}''(1) = 0 \quad (43)$$

微分方程式系 $O(A)$ を数値的に解くため、Chebyshev多項式を用いたスペクトル法を導入する。以上の数値計算の後、周波数 ω は次のような関数形で求められる。

$$\omega = \omega(k, Re, S) \quad (44)$$

ここで、複素角周波数 ω の虚部 $\text{Im}[\omega]$ が擾乱の成長率である。

5. 結果および考察

5.1. 管路の高さ d による影響

図-2に解析から得られた $\text{Im}[\omega]$ の k - Re 平面におけるコンタを示す。管路の高さが十分に大きく開水路の流れとして扱える条件下である $d = 10^6, 10^4, 10^2$ の安定領域と不安定領域の境界面を示す中立線は一致している。これらの中立線は既に得られている開水路の自由表面流の結果とも一致しており、今回のモデルの妥当性を示している。また、 $d = 10$ (図-2の破線部)に着目すると、波数 k が $1 \leq k \leq 7$ の領域では d が10より大きい場合には見られなかった不安定領域の広がりが確認できた。特に $S=0.0001$ をみると $d = 10$ の時の不安定領域は、他の d に比べて広がりが大きい。これは勾配が極端に小さくなると液相の重力波による不安定性への寄与が小さくなり、気相の流れの不安定性への寄与が顕著に影響してくるためである。

5.2. $d = 1.2$ の時

実際の水道管のスケールに合わせるため $d = 1.2$ を用いて解析を行ったところ図-3に示すような安定性ダイアグラムが得られた。図-2と図-3の結果を比較すると、 $S = 0.1$ かつ $d = 1.2$ の条件で $10^2 \leq Re \leq 10^4$ 、 $k \leq 2$ の領域では、開水路での安定性ダイアグラムでは見られない2つの不安定性モードが現れている。また、図-2の小さいReynolds数のもとで不安定な領域が、 $d = 1.2$ の場合では安定である。さらに、波数 k 、Reynolds数がともに大きい領域(図の右上部)では小さな勾配でも新たな不安定領域が形成される。

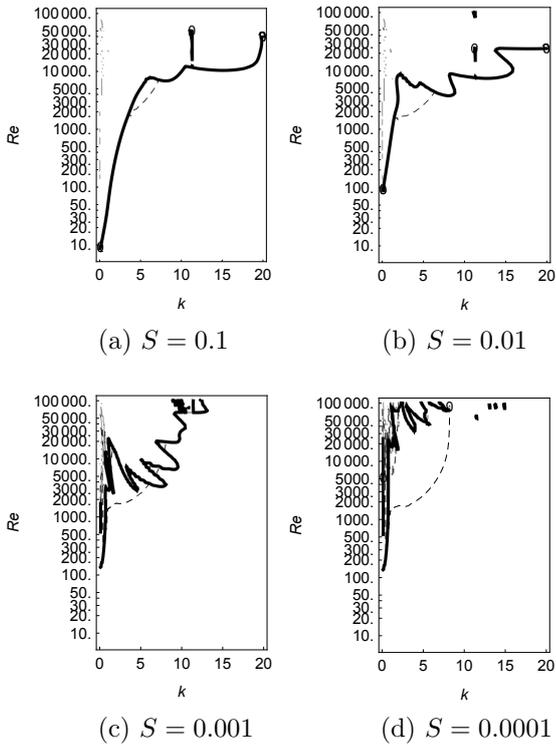


図 - 2 各勾配 S についての $k-Re$ 空間での摂動の増幅率
 $Im[\omega] = 0$ の中立曲線。 $d = 10^6$, $d = 10^4$ は実線,
 $d = 10^2$ は太線, $d = 10$ は破線でそれぞれ示して
 いる。

6. 結論

本研究では、管水路内における気相-液相の層流流れの線形安定解析を行い、開水路のモデルに比べ空気流れを考慮した流れの様々な勾配における安定性ダイアグラムを得た。また、空気流れが存在することにより開水路では見られなかったモードおよび不安定性領域が確認できた。

参考文献

- 1) James Li and Alex McCoquodale : Modeling Mixed Flow In Storm Sewers, *Journal Of Hydraulic Engineering*, November 1999.
- 2) 泉 典洋, デリマアドリアーノ コーティニョ:自由表面流の安定性再考, 土木学会論文, 2014.

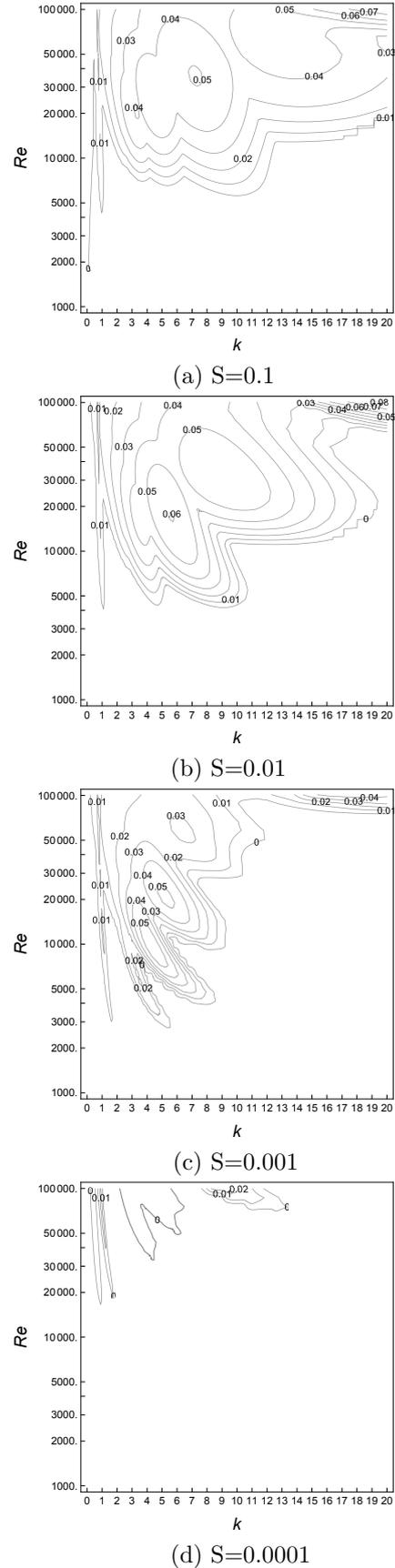


図 - 3 $d = 1.2$ における $k-Re$ 空間での摂動の増幅率