

竹の異方性および維管束配置を考慮した円筒構造における 断面扁平抵抗の定式化

Formulation of suppressing cross sectional ovalisation in cylindrical structures
considering anisotropy and fiber arrangement of bamboo

北海道大学工学部環境社会工学科
北海道大学大学院工学院
北海道大学大学院工学院
山梨大学大学院総合研究部
熊本県立大学環境共生学部
北海道大学大学院工学研究院

○ 学生員 亀山 侑平 (Yuhei Kameyama)
学生員 宮川 奨 (Sho Miyakawa)
学生員 谷垣 俊行 (Toshiyuki Tanigaki)
非会員 島 弘幸 (Hiroyuki Shima)
非会員 井上 昭夫 (Akio Inoue)
正 員 佐藤 太裕 (Motohiro Sato)

1. はじめに

生体模倣とは生体の組成や形状を研究し、それを工学技術へ適応させたもののことをいう。近年では、イルカの表皮のしわを再現することにより、水の摩擦抵抗を低減させた洗浄力の高い洗濯機の開発やトンボの羽の断面のギザギザした形状をエアコンのファンに取り入れ、風圧に逆らわない風の流れを作り出すことによる、省エネ、低騒音化が実現されている。その中で本研究では、植物の「竹」に着目し研究を進めていく。竹は本来曲げに弱い中空円筒構造をとっているが、木質部に比べて非常に硬い維管束が傾斜的に配置されていること、円筒構造内に複数の節が配置されていることによって曲げに対する抵抗性を高めている。本研究では竹の断面のつぶれに着目し、異方性（後述）、維管束分布を考慮に入れた断面扁平抵抗性を表すパラメータの定式化を試みる。

2. 円筒構造と断面のつぶれ

2.1 断面扁平抑制効果

円筒構造において、曲げモーメントを大きくしていくと、最初は一樣に曲がっていた円筒の断面に断面扁平が発生し、楕円形に変形することがある。このことを *Brazier effect*¹⁾ という。断面扁平が起こると曲げ剛性の値が減少し、強度の低下につながる。しかし、竹は節構造をもつことによって、円筒の両端を固定し、断面扁平を抑制している。両端に拘束がない場合は楕円化は均一になる。一方で、両端に拘束がある場合は *end-effect* と呼ばれる影響を受け、断面扁平が抑制される。この断面扁平抑制効果には節間長が関わっており、節間長が短ければ、*end-effect* が全体に影響し、全体的に断面扁平が抑制されるが、節間長 L が長い場合は節間中央にかけて扁平が大きくなる（図-1）。これらを踏まえた上で竹断面のつぶれ抵抗を評価するために、本研究では断面扁平抵抗を表す指標として無次元数 Ω を導入する。

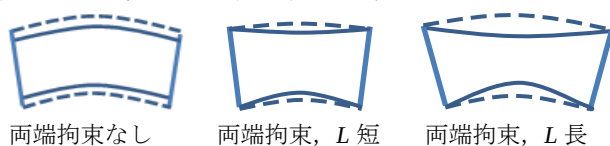


図-1 断面扁平の比較

2.2 無次元数 Ω

Ω は *Calladine*²⁾ によって定義された、両端固定の円筒構造のつぶれに対する抵抗を表す無次元の値であり、節間長 L 、腹半径 R 、厚さ h を用いて

$$\Omega = \sqrt{hL^2 / R^3} \quad (1)$$

と表される。図-1 より L の値が小さいほど断面扁平が抑制されるため、 Ω の値が小さいほど断面扁平が生じにくいといえる。しかし、式(1)は等方性（後述）の場合の式であり、断面二次モーメントの計算過程で厚さに関して無視している部分があるため、本研究ではその点を考慮しつつ、 Ω の定式化を行っていく。

3. 竹の特性

3.1 等方性構造と異方性構造

あるものの性質や分布が方向によらず一定であるものを等方性構造、方向によって異なるものを異方性構造という。竹は異方性構造をとるため、ヤング率 E が軸方向と円周方向によって異なる。

3.2 竹の組織構造

竹は断面内に強靱な維管束をもち、それにより強度を高めている。図-2 からその配列は表皮側に向かい徐々に密になっていくことが読み取れる。 Ω を定式化していくにあたり、この維管束分布を考慮する必要がある。図-3 より中心から半径方向外向きを正とする座標 r を定め、断面の中心から肉厚部分の中間点までを a 、厚さを h において維管束含有率 $V_f(r)$ を以下の関数で表す³⁾。

$$V_f(r) = c_0 + c_1 r + c_2 r^2 \quad \left(a - \frac{h}{2} \leq r \leq a + \frac{h}{2} \right) \quad (2)$$

また、竹における軸方向のヤング率 $E_{//}(r)$ 、円周方向のヤング率 $E_{\perp}(r)$ を竹の木質部のヤング率を E_m 、維管束部を E_f において、それぞれ以下のように表す⁴⁾。

$$E_{//}(r) = E_f V_f(r) + E_m (1 - V_f(r)) \quad (3)$$

$$E_{\perp}(r) = \left(\frac{V_f(r)}{E_f} + \frac{1 - V_f(r)}{E_m} \right)^{-1} \quad (4)$$

ここで計算のために以下のように置換する.

$$b_0 = E_m - (E_f - E_m)c_0, \quad b_1 = (E_f - E_m)c_1, \quad b_2 = (E_f - E_m)c_2, \\ d_0 = E_f - (E_m - E_f)c_0, \quad d_1 = (E_m - E_f)c_1, \quad d_2 = (E_m - E_f)c_2$$

$$E_{//}(r) = b_0 + b_1 r + b_2 r^2 \quad (5)$$

$$E_{\perp}(r) = \left(\frac{d_0 + d_1 r + d_2 r^2}{E_f E_m} \right)^{-1} \quad (6)$$

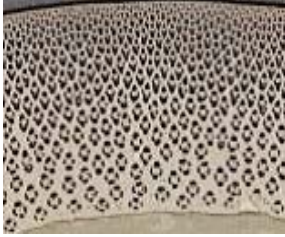


図-2 竹の維管束分布

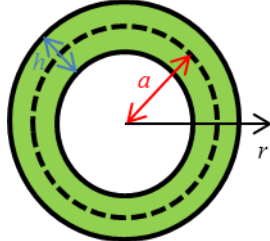


図-3 竹の断面の定義

4. 断面扁平抵抗 Ω の定式化

4.1 ひずみエネルギー

弾性体にエネルギーが加わると弾性変形が起きる. この変形によって蓄えられたエネルギーのことをひずみエネルギーという. Ω を定式化していくにあたり, 竹の断面扁平をひずみエネルギーに適応させる. 曲率を C , 断面二次モーメントを I , 曲げモーメントを M とすると, 軸方向のひずみエネルギーは

$$U_z = \frac{1}{2} C^2 E_{//}(r) I \quad (7)$$

円周方向のひずみエネルギーは

$$U_{\theta} = \int_0^{2\pi} \frac{M^2}{2E_{\perp}(r)I} r dr d\theta \quad (8)$$

と表すことができる.

4.2 異方性構造における Ω

軸方向, 円周方向のヤング率はそれぞれ式(5), 式(6)において $b_1 = b_2 = d_1 = d_2 = 0$, すなわち維管束分布が均一な場合の値をとる. この時の軸方向のヤング率を $E_{//0}$, 円周方向のヤング率を $E_{\perp 0}$ とする. ここで計算のために $a + h/2 = A$, $a - h/2 = B$ とおき, 楕円化率を ξ として全ひずみエネルギーを求める.

$$U = U_z + U_{\theta} \\ = \frac{1}{8} \pi C^2 E_{//0} \left(1 - \frac{3}{2} \xi \right) (A^4 - B^4) \\ + \frac{9}{8} \pi \xi^2 E_{\perp 0} (A^2 - B^2) \quad (9)$$

ここで停留条件 $\delta U / \delta \xi = 0$ を用いて ξ の式にする.

$$\xi = \frac{C^2 E_{//0} (A^4 - B^4)}{12 E_{\perp 0} (A^2 - B^2)} \quad (10)$$

節の影響が節間の全域に及ぶ場合, *sagitta* の関係²⁾ により, 曲率と楕円化率は次式が成り立つ.

$$C = 8a\xi / L^2 \quad (11)$$

式(10), 式(11)より Ω を導出すると

$$\Omega = \left(\frac{12L^4 (A^2 - B^2)}{a^2 (A^4 - B^4)} \right)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{E_{\perp 0}}{E_{//0}} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (12)$$

このとき, $1/4$ 乗の項の左部は等方性の場合の Ω の式, 右部は $E_{\perp 0}/E_{//0}$ の $1/4$ 乗となっている.

4.3 異方性構造かつ維管束分布が二次関数の場合の Ω

異方性構造に加えて維管束配置も考慮するため, 軸方向, 円周方向のヤング率はそれぞれ式(5), 式(6)にあたる. ここから同様の流れで Ω を導出すると

$$\Omega = \left(\frac{12L^4 (A^2 - B^2)}{a^2 (A^4 - B^4)} \right)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{15E_f E_m (A^2 + B^2)}{d_2} \right)^{\frac{1}{4}} \\ \left(\log \frac{A \{ A d_2 + d_1 \} + d_0}{B \{ B d_2 + d_1 \} + d_0} - \frac{2d_1}{\sqrt{4d_0 d_2 - d_1^2}} \left(\tan^{-1} \frac{2A d_2 + d_1}{\sqrt{4d_0 d_2 - d_1^2}} - \tan^{-1} \frac{2B d_2 + d_1}{\sqrt{4d_0 d_2 - d_1^2}} \right) \right)^{\frac{1}{4}} \\ \left(\frac{15b_0 (A^4 - B^4) + 12b_1 (A^5 - B^5) + 10b_2 (A^6 - B^6)}{15b_0 (A^4 - B^4) + 12b_1 (A^5 - B^5) + 10b_2 (A^6 - B^6)} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (13)$$

こちらも式(12)と同様に等方性の場合の Ω と $E_{\perp}/E_{//}$ の $1/4$ 乗の積で表される.

5. 今後の展望

以上の式から異方性, 維管束を考慮した場合の Ω を定式化することができた. 今後の研究では, 半径, 厚さなどの諸条件を与えた際のそれぞれの Ω の値を比較し, 異方性構造, 維管束分布がたづね抵抗にどれほどの影響を与えているのかを考察していきたい. また, 維管束分布を他の関数で表した際の Ω 値とも比較し, 竹の維管束分布がたづねに対して最適な配置をとっているのかを確認していきたい.

謝辞

本研究は科研費基盤研究(B)(研究課題番号:15H04207, 研究代表者: 佐藤太裕)により実施されたことを付記し, 関係各位にお礼申し上げます.

参考文献

- 1) L. G. Brazier: On the flexure of thin cylindrical shells and other "thin" sections, Proceedings of the Royal Society of London. Series A, pp.104-114, 1927
- 2) C. Calladine: Theory of shell structures, Cambridge, Cambridge Univ. Press, pp.595-615, 737, 1983
- 3) M. Sato, A. Inoue, and H. Shima: Bamboo-inspired optimal design for functionally graded hollow cylinders, PLOS ONE, e0175029, 2017
- 4) D. Hull, T. W. Clyne: An introduction to composite materials, Cambridge Univ. Press, pp.60-64, 1990