

Global-Local 重合理論による異方性積層板の厚板解析

Bending analysis of thick anisotropic laminated plates using global-local theory

函館工業高等専門学校 正員 渡辺 力 (Chikara WATANABE)
 函館工業高等専門学校 学生会員 金浜瞳也 (Tohya KANAHAMA)

1. まえがき

繊維強化プラスチック (FRP) などの複合材料は、繊維で補強した方向に対して直角方向の強度を補うために強化方向の異なるラミナを何枚か重ねた積層板として使用されるため、異方性積層板としての取り扱いが必要となる。この異方性積層板では、板厚比が大きくなると ZIG-ZAG 変位が顕著に現れ、この ZIG-ZAG 変位の影響を考慮するために ZIG-ZAG 理論や Global-Local 理論などの研究が精力的に行われている。

ZIG-ZAG 理論では、ZIG-ZAG 変位を各層において区間的に直線分布する連続関数として取り扱い、厚板理論の変位場に ZIG-ZAG を付加した変位場が用いられる^{1)~3)}。この ZIG-ZAG 理論では、層境界において変位の連続性は満足されるが、面外応力の連続性と境界条件が満足されない。

それに対して、Li らの Global-Local 重合理論⁴⁾では、三次せん断変形理論の変位場 (Global 項) に、三次多項式 (Local 項) を付加し、これらが層境界での変位・面外応力の連続性と面外応力の境界条件を満足するように変位関数を定める。したがって、Global-Local 重合理論では変位・面外応力の連続性と応力の境界条件を満足する解が得られる特徴がある。

本研究では、異方性積層板の厚板解析における ZIG-ZAG 理論と Global-Local 理論の得失を明らかにすることを目的としている。Global-Local 理論には Li の Global-Local 重合理論⁴⁾を用い、ZIG-ZAG 理論には Refined ZIG-ZAG 理論 (RZT) を改良した理論を用いて、級数解法により周辺単純支持板の曲げ解析を行って精度を比較する。なお、ZIG-ZAG 理論では層境界における面外応力の連続性と面外応力の境界条件を満足しないために、三次元弾性理論の応力の平衡方程式を用いて改良した面外応力⁵⁾を用いて比較を行う。

2. Global-Local 重合理論

Global-Local 重合理論では、第 k 層における並進変位の 3 成分を次のように表す⁴⁾。

$$\begin{aligned} u^{(k)} &= u_G + \bar{u}_L^{(k)} + \tilde{u}_L^{(k)} \\ v^{(k)} &= v_G + \bar{v}_L^{(k)} + \tilde{v}_L^{(k)}, \quad w = w_G \end{aligned} \quad (1)$$

ここに、 u_G, v_G, w_G は Global 変位成分で、Pandya の三次せん断変形理論の変位場が用いられる。また、

$\bar{u}_L^{(k)}, \tilde{u}_L^{(k)}$ などは Local 変位成分で、ZIG-ZAG 変位を表すための変位成分である。これらの変位成分は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} u_G &= u_0 + z u_1 + z^2 u_2 + z^3 u_3 \\ v_G &= v_0 + z v_1 + z^2 v_2 + z^3 v_3 \\ w_G &= w_0 \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \bar{u}_L^{(k)} &= \zeta^{(k)} u_1^{(k)} + \zeta^{(k)2} u_2^{(k)}, \quad \tilde{u}_L^{(k)} = \zeta^{(k)3} u_3^{(k)} \\ \bar{v}_L^{(k)} &= \zeta^{(k)} v_1^{(k)} + \zeta^{(k)2} v_2^{(k)}, \quad \tilde{v}_L^{(k)} = \zeta^{(k)3} v_3^{(k)} \end{aligned} \quad (3)$$

式 (1) より面外ひずみ成分と面外応力成分を計算し、式 (3) の Local 変位成分に層境界での変位の連続性を考慮し、面外せん断応力の層境界での連続性と上下縁での境界条件を考慮することにより次の変位場が得られる。

$$\begin{aligned} u^{(k)} &= u_0 + \phi_1^{(k)} u_1 + \phi_2^{(k)} u_1^1 + \phi_3^{(k)} u_2 + \phi_4^{(k)} u_3 + \phi_5^{(k)} w_0' \\ v^{(k)} &= v_0 + \psi_1^{(k)} v_1 + \psi_2^{(k)} v_1^1 + \psi_3^{(k)} v_2 + \psi_4^{(k)} v_3 + \psi_5^{(k)} \dot{w}_0 \\ w &= w_0 \end{aligned} \quad (4)$$

ここに、 u_1^1, v_1^1 は Local 変位成分であり、変位成分には w_0 の微分項 w_0', \dot{w}_0 が含まれる。これにより、Pandya の三次せん断変形理論の変位場に比べると 4 成分が追加され、変位成分は 11 となる。

3. ZIG-ZAG 理論

3.1 構成方程式

直交異方性材料の構成方程式により、図-1 の直交積層板の第 k 層の応力-ひずみ関係式を次のように表す。

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{13} & 0 \\ & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{23} & 0 \\ & & \bar{Q}_{33} & 0 \\ sym. & & & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}^{(k)} \quad (5)$$

$$\begin{Bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{44} & 0 \\ 0 & \bar{Q}_{55} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix}^{(k)} \quad (6)$$

3.2 改良した ZIG-ZAG 関数

ZIG-ZAG 変位を各層において区間的に直線分布する連続関数と仮定する。図-2(c) に示すように、各層

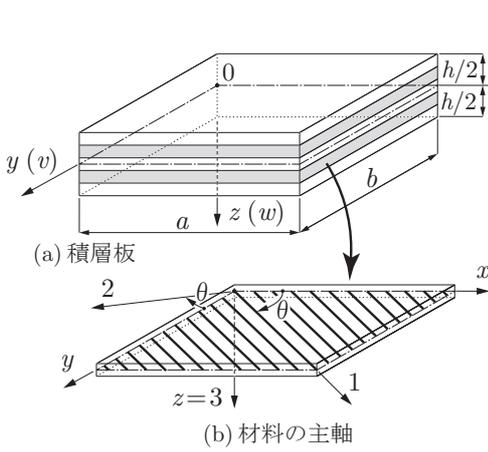


図-1 積層板と座標系

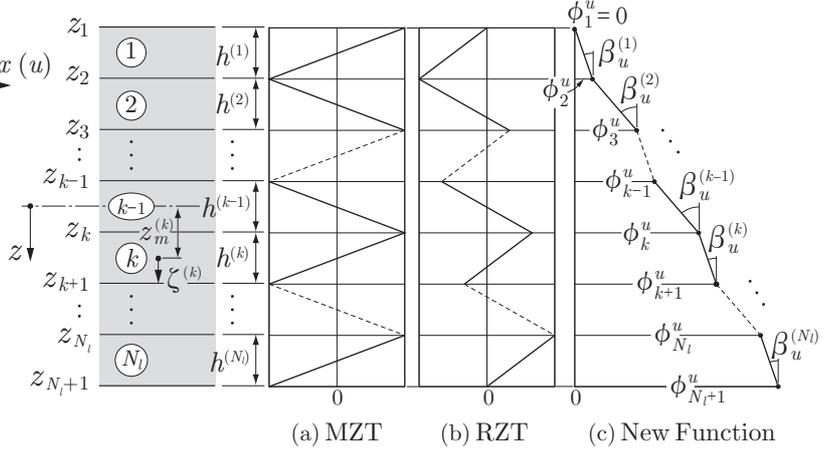


図-2 ZIG-ZAG 関数

における ZIG-ZAG 関数の勾配 $\beta_u^{(k)}, \beta_v^{(k)}, \beta_w^{(k)}$ を定めて、各層境界での ZIG-ZAG 関数値 $\phi_k^u, \phi_k^v, \phi_k^w$ を決定し、それを線形補間して ZIG-ZAG 関数を次のように表す。

$$\begin{aligned} \phi_u^{(k)} &= \beta_u^{(k)}z + a_u^{(k)}, & \phi_v^{(k)} &= \beta_v^{(k)}z + a_v^{(k)} \\ \phi_w^{(k)} &= \beta_w^{(k)}z + a_w^{(k)} \end{aligned} \quad (7)$$

式 (7) の ZIG-ZAG 関数の勾配は、まず式 (6) の面外せん断弾性定数 $\bar{Q}_{55}^{(k)}, \bar{Q}_{44}^{(k)}$ に応じて $\beta_u^{(k)}, \beta_v^{(k)}$ を定め、面外変位 w に対する勾配 $\beta_w^{(k)}$ は面外せん断応力が三次元弾性理論の応力の平衡方程式を満足するように求める。また、ZIG-ZAG 関数の勾配 $\beta_u^{(k)}, \beta_v^{(k)}$ の計算においては、外側弱層、すなわち、上端の第 1 層と下端の第 N_l 層において面外せん断弾性定数が $\bar{Q}_{ii}^{(1)} < \bar{Q}_{ii}^{(2)}$ あるいは $\bar{Q}_{ii}^{(N_l)} < \bar{Q}_{ii}^{(N_l-1)}$ となるときには修正を行う ($i=4,5$)。

3.3 ZIG-ZAG 変位を考慮した三次せん断変形理論の変位場

第 k 層の変位成分を、完全な三次せん断変形理論の変位場に ZIG-ZAG 項を付加して次式で表す。

$$\begin{aligned} u^{(k)} &= u_0 + z u_1 + z^2 u_2 + z^3 u_3 + \phi_u^{(k)} \psi_u \\ v^{(k)} &= v_0 + z v_1 + z^2 v_2 + z^3 v_3 + \phi_v^{(k)} \psi_v \\ w^{(k)} &= w_0 + z w_1 + z^2 w_2 + z^3 w_3 + \phi_w^{(k)} \psi_w \end{aligned} \quad (8)$$

ここに、 u_i, v_i, w_i は中央面 ($z=0$) における並進変位の成分で、 ψ_u, ψ_v, ψ_w が ZIG-ZAG 変位である。また、 $\phi_u^{(k)}, \phi_v^{(k)}, \phi_w^{(k)}$ は式 (7) の ZIG-ZAG 関数である。式 (8) の変位成分は、等価単層理論 (12 成分) に比べると ZIG-ZAG 変位の 3 成分が追加され、変位成分は 15 となる。

3.4 面外応力の改良

ZIG-ZAG 理論では、変位の連続性は満足されるが、面外応力は等価単層理論と同様に層境界の連続性と境

界条件を満足しない。そこで、本研究では三次元弾性理論の応力の平衡方程式から面外応力を計算することにより精度の改善を図る⁵⁾。

三次元弾性理論の応力の平衡方程式から計算した面外応力に層境界の連続性と境界条件を考慮して、第 k 層の座標 z における改良した面外応力 $\tau_{xz}^{*(k)}(z), \tau_{yz}^{*(k)}(z), \sigma_z^{*(k)}(z)$ を、座標 z に関する応力、層境界に関する応力、応力の境界条件に分けて次のように表す。

$$\begin{aligned} \tau_{xz}^{*(k)}(z) &= \tau_{xz}^{(k)}(z) + \bar{\tau}_{xz}^{(k)} + \tau_{xz}^t \\ \tau_{yz}^{*(k)}(z) &= \tau_{yz}^{(k)}(z) + \bar{\tau}_{yz}^{(k)} + \tau_{yz}^t \\ \sigma_z^{*(k)}(z) &= \sigma_z^{(k)}(z) + \bar{\sigma}_z^{(k)} + \sigma_z^t \end{aligned} \quad (9)$$

4. 数値計算例

4.1 計算モデル

計算モデルは、図-1 に示す長さ a 、幅 b 、板厚 h の周辺単純支持された直交積層板であり、形状比を $a/b=1$ 、板厚比 $h/b=0.3$ とする。

層数 N_l を 3, 5, 6 とし、

$$3 \text{ 層} : [0/90^\circ/0], \quad 5 \text{ 層} : [0/90^\circ/0/90^\circ/0]$$

$$6 \text{ 層} : [0/90^\circ/0/90^\circ/0/90^\circ]$$

の 3 ケースについて計算する。材料定数には次の値を用いる。

$$E_1/E_2 = 25, \quad E_3 = E_2, \quad G_{12} = G_{13} = 0.5E_2$$

$$G_{23} = 0.2E_2, \quad \nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{23} = 0.25$$

荷重は、板上縁に正弦荷重 ($q=q_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}$) を作用させる。また、図-3 に変位と応力の観測点を示す。

式 (8) の ZIG-ZAG 理論では変位場の採り方を変えて検討するが、モデル名については、「ZZ」を本研究の ZIG-ZAG 理論、「MZ」を Murakami 関数を用いた ZIG-ZAG 理論、「ES」を等価単層理論とし、式 (4) の Global-Local 重合理論は「GL30」と表す。

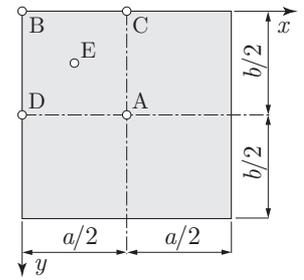


図-3 観測点

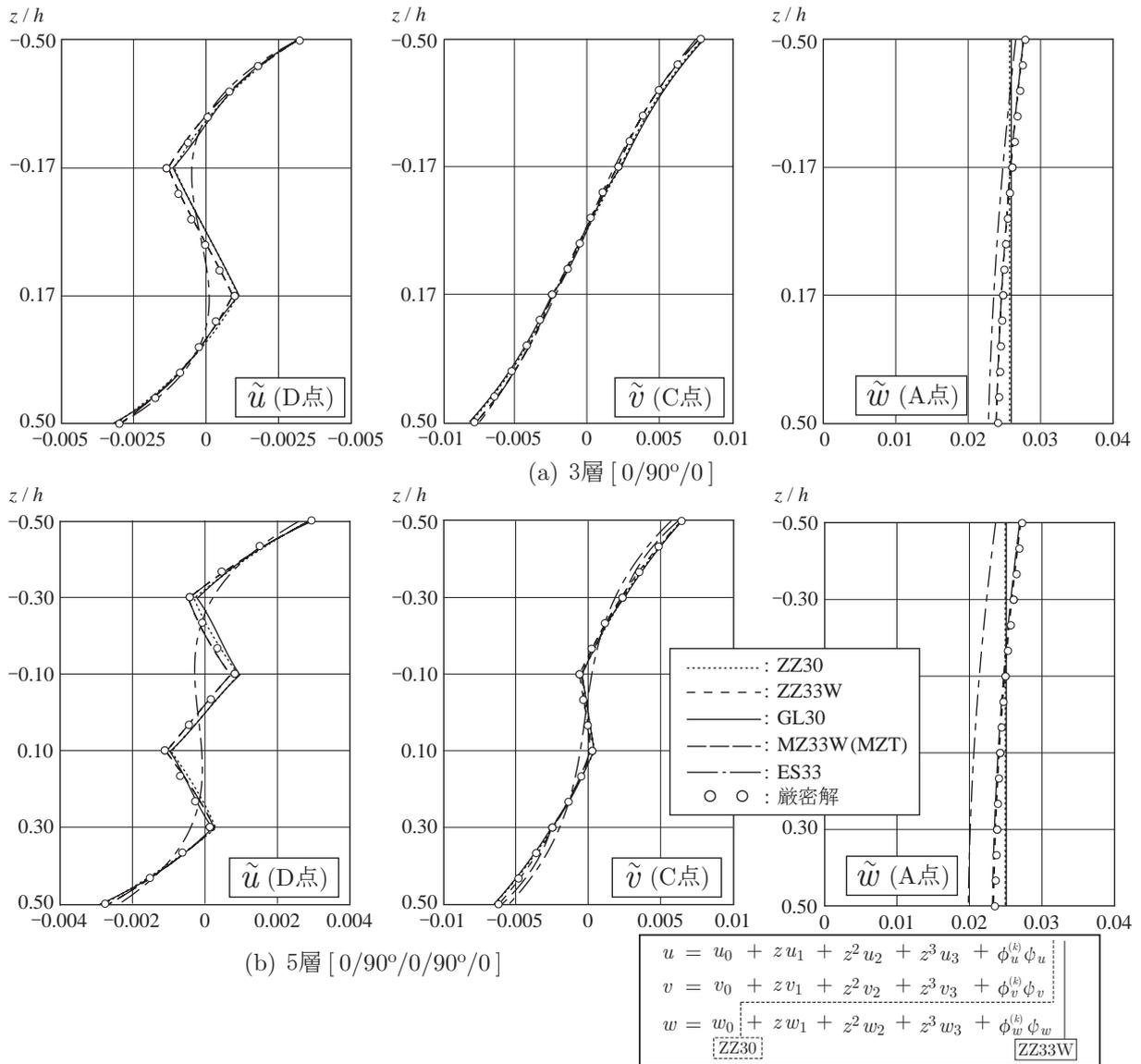


図-4 変位分布 (板厚比 $h/b=0.3$)

4.2 変位と面外応力

図-4(a),(b)は3層と5層の変位 u, v, w の板厚方向の分布図であり、縦軸には座標 z を、横軸には変位を無次元化して示している。点線が ZZ30、短い破線が ZZ33W、実線が GL30 の計算結果で、破線が Murakami 関数を用いた MZ33W、一点鎖線が等価単層理論 ES33 の結果で、 \circ 印が厳密解⁶⁾である。

板厚比 $h/b=0.3$ では、面内変位に大きな ZIG-ZAG 変位が生じるが、ZIG-ZAG 理論、Global-Local 重合理論とも厳密解と良く一致しており、層境界での連続性を満足している。なお、変位 w の変位場に定数項のみを用いる GL30 と ZZ30 では、変位 w が板厚方向に一定値となる。

図-5は3, 5, 7層の面外応力 $\sigma_x^*, \tau_{yz}^*, \tau_{xz}^*$ の板厚方向の分布図である。なお、変位 w の変位場に定数項のみを用いる GL30 では面外垂直応力 σ_z は計算できないで図に示されていない。また、ZIG-ZAG 理論では式 (9)

の改良した応力を示している。

Global-Local 重合理論と ZIG-ZAG 理論により計算した面外応力は、どちらも層境界での連続性と応力の境界条件を満足している。しかし、Global-Local 重合理論の面外せん断応力 (実線) は総数が少ない場合には厳密解と良く一致しているが、層数が増えると誤差が大きくなり、図 (c) の6層では精度が極めて悪くなっている。このことから、Global-Local 重合理論でも層数が多い場合には面外応力の改良が必要なる。

参考文献

- 1) Murakami, H.: Laminated composite plate theory with improved in-plane responses, *Journal of Applied Mechanics*, Vol.53, pp.661-666, 1986.
- 2) Tessler, A., Di Sciuva, M. and Gherlone, M.: Refined zigzag theory for laminated composite and sandwich plates, Technical Publication 215561, National Aeronautics and Space Administration, 2009.
- 3) Groh, R.M.J. and Weaver, P.M.: A computationally ef-

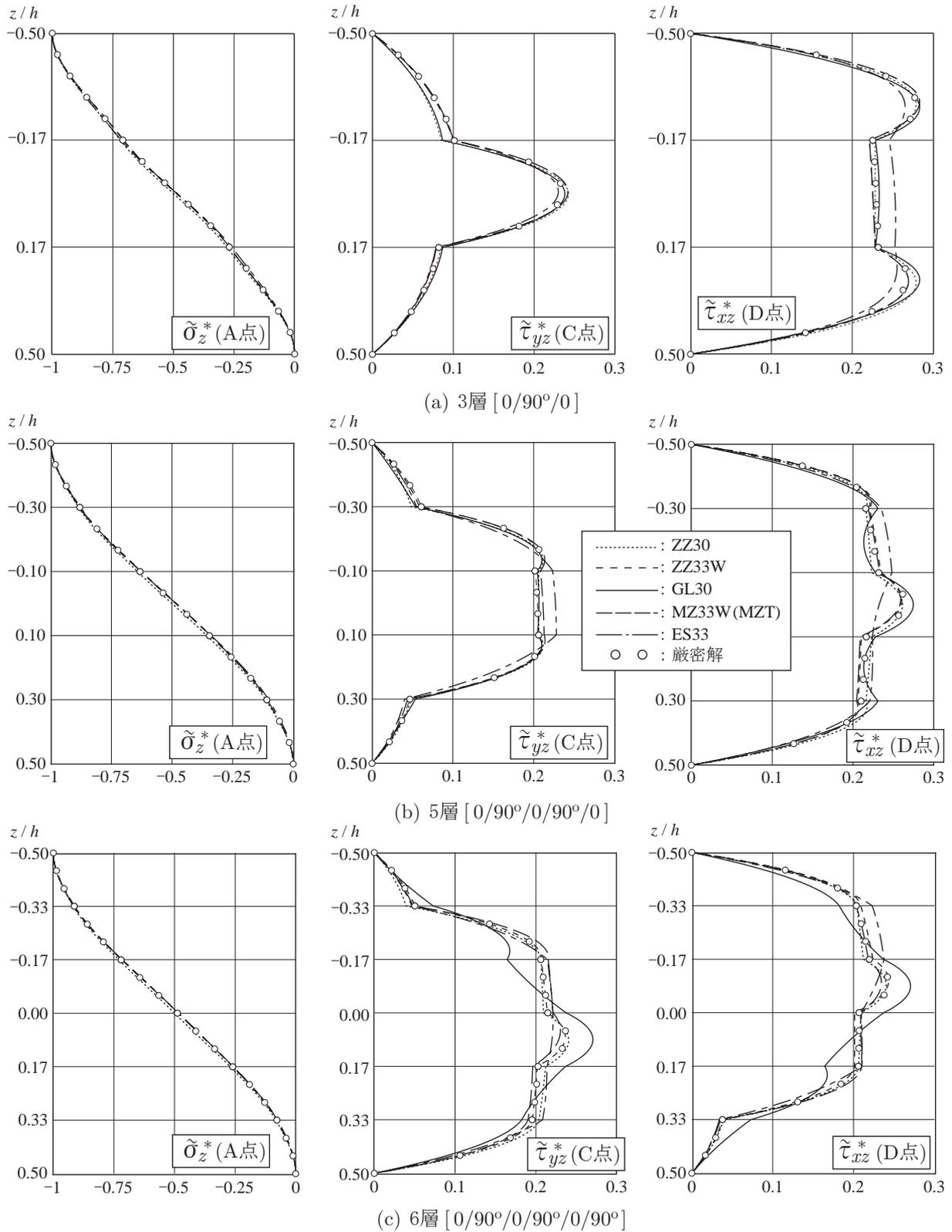


図-5 面外応力の分布 (板厚比 $h/b=0.3$)

- efficient 2D model for inherently equilibrated 3D stress predictions in heterogeneous laminated plates, Part II: Model formulation, *Composite Structures*, Vol.156, pp.171-185, 2016.
- 4) Li, X. and Liu, D. : Generalized laminate theories based on double superposition hypothesis, *Int J Numer Methods Eng*, Vol.40, pp.1197-1212, 1997.
 - 5) 渡辺 力 : 等価単層理論に基づく各種の厚板理論による異方性積層板の級数解ならびに面外応力の改良, *構造工学論文集*, Vol.63A, pp.14-27, 2017.
 - 6) Pagano, N.J. ; Exact solutions for rectangular bidirectional composites and sandwich mates, *J. Compos. Mater.*, Vol.4, pp.20-34, 1970.