

異方性積層板の厚板解析における ZIG-ZAG 関数の改良

Improvement of zig-zag functions in bending analysis of thick anisotropic laminated plates

函館工業高等専門学校 正員 渡辺 力 (Chikara WATANABE)
 函館工業高等専門学校 学生会員 堀 桜花 (Ohka HORI)
 函館工業高等専門学校 学生会員 成田勇介 (Yusuke NARITA)
 函館工業高等専門学校 学生会員 ムギ (Otgonbat Munkhsukh)

1. まえがき

繊維強化プラスチック (FRP) などの複合材料が、建設材料として盛んに用いられるようになった。異方性積層板として取り扱われる複合材料では、板厚比が大きくなると ZIG-ZAG 変位が顕著に現れ、この ZIG-ZAG 変位の影響を考慮するための ZIG-ZAG 理論の研究が古くから行われている¹⁾。

最近の ZIG-ZAG 理論に関する研究では、ZIG-ZAG 変位の分布を表す ZIG-ZAG 関数に Murakami 関数²⁾あるいは Refined ZIG-ZAG 理論 (RZT) の関数³⁾を用いるのが主流となっている。しかしながら、Murakami 関数では隣接する層の ZIG-ZAG 関数の勾配を異符号になるように強制しており、外側弱層 (external weak layer) の修正を行うことができないので、積層順序によっては精度が悪くなる。また、RZT では面外変位 w に対する ZIG-ZAG 関数は開発されておらず、RZT の ZIG-ZAG 関数は等方性平板に適用できない。

本研究では、RZT の ZIG-ZAG 関数を等方性平板にも適用できるように改良するとともに、厚板解析に有効な面外変位 w に対する ZIG-ZAG 関数を開発する。この新たな ZIG-ZAG 関数を用いた ZIG-ZAG 理論により、各種の三次せん断変形理論と一次せん断変形理論に基づく級数解を統一的に定式化する。また、ZIG-ZAG 理論を用いても面外応力は層境界の連続性と境界条件を満足しないので、三次元弾性理論の応力の平衡方程式を用いて改良を図る⁴⁾。数値計算を行って、精度と厚板解析への適用性を検証した結果について報告する。

2. ZIG-ZAG 関数

2.1 構成方程式

直交異方性材料の構成方程式により、図-1 の直交積層板の第 k 層の応力-ひずみ関係式を次のように表す。

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{13} & 0 \\ & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{23} & 0 \\ & & \bar{Q}_{33} & 0 \\ sym. & & & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}^{(k)} \quad (1)$$

$$\begin{Bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{44} & 0 \\ 0 & \bar{Q}_{55} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix}^{(k)} \quad (2)$$

2.2 既往の ZIG-ZAG 関数

ZIG-ZAG 変位の板厚方向の分布を表す ZIG-ZAG 関数として、次の関数が用いられている。

(1) Murakami 関数

Murakami の ZIG-ZAG 理論 (MZT) では、変位 u, v, w に対して同じ次の関数が用いられる²⁾。

$$\phi_u^{(k)} = \phi_v^{(k)} = \phi_w^{(k)} = (-1)^k \frac{2}{h^{(k)}} (z - z_m^{(k)}) \quad (3)$$

ここに、 $\phi_u^{(k)}$ は変位 u に対する ZIG-ZAG 関数で、 $h^{(k)}$ は第 k 層の厚さ、 $z_m^{(k)}$ は第 k 層の中央点の z 座標値である。板厚方向の分布を図-2(a) に示す。

(2) RZT の関数

Refined ZIG-ZAG 理論 (RZT) では、変位 u, v に対して次の ZIG-ZAG 関数が用いられる³⁾。

$$\begin{aligned} \phi_u^{(k)} &= \left(z + \frac{h}{2}\right) \left(\frac{G_u}{\bar{Q}_{55}^{(k)}} - 1\right) + \sum_{i=2}^k h^{(i-1)} \left(\frac{G_u}{\bar{Q}_{55}^{(i-1)}} - \frac{G_u}{\bar{Q}_{55}^{(k)}}\right) \\ \phi_v^{(k)} &= \left(z + \frac{h}{2}\right) \left(\frac{G_v}{\bar{Q}_{44}^{(k)}} - 1\right) + \sum_{i=2}^k h^{(i-1)} \left(\frac{G_v}{\bar{Q}_{44}^{(i-1)}} - \frac{G_v}{\bar{Q}_{44}^{(k)}}\right) \end{aligned} \quad (4)$$

ここに、 $\bar{Q}_{55}^{(k)}, \bar{Q}_{44}^{(k)}$ は式 (2) の面外せん断弾性定数で、 G_u, G_v はその重み付き平均である。なお、RZT では、変位 w に対する $\phi_w^{(k)}$ は開発されていない。

2.3 改良した ZIG-ZAG 関数

本研究では、ZIG-ZAG 変位を各層において区間的に直線分布する連続関数と仮定する。図-2(c) に示すように、各層における ZIG-ZAG 関数の勾配 $\beta_u^{(k)}, \beta_v^{(k)}, \beta_w^{(k)}$ を定めて、各層境界での ZIG-ZAG 関数値 $\phi_k^u, \phi_k^v, \phi_k^w$ を決定し、それを線形補間して ZIG-ZAG 関数を次のように表す。

$$\begin{aligned} \phi_u^{(k)} &= \beta_u^{(k)} z + a_u^{(k)}, & \phi_v^{(k)} &= \beta_v^{(k)} z + a_v^{(k)} \\ \phi_w^{(k)} &= \beta_w^{(k)} z + a_w^{(k)} \end{aligned} \quad (5)$$

式 (5) の ZIG-ZAG 関数の勾配は、まず面外せん断弾性定数 $\bar{Q}_{55}^{(k)}, \bar{Q}_{44}^{(k)}$ に応じて $\beta_u^{(k)}, \beta_v^{(k)}$ を定め、面外変位

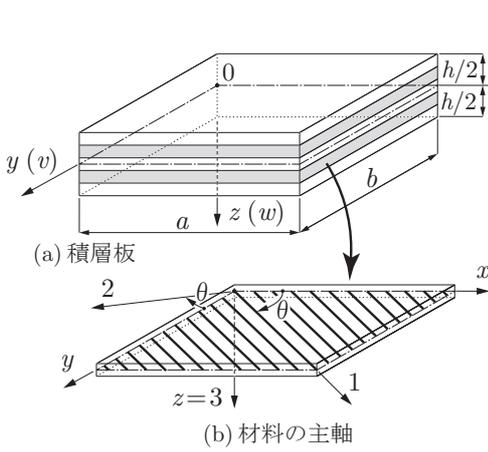


図-1 積層板と座標系

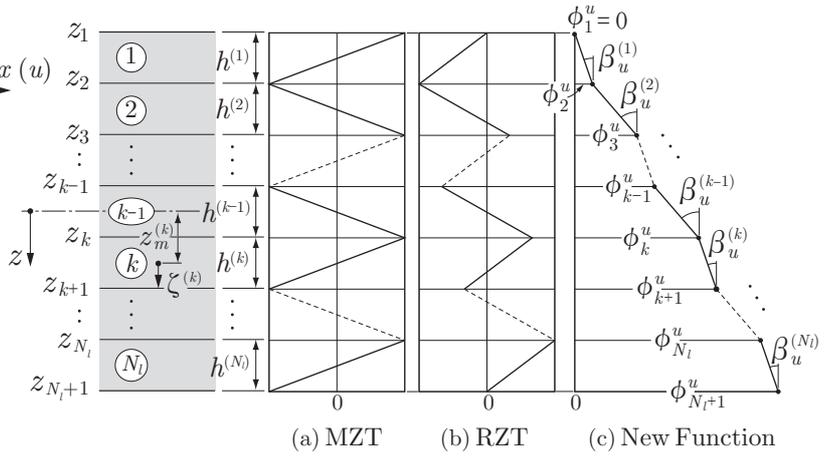


図-2 ZIG-ZAG 関数

w に対する勾配 $\beta_w^{(k)}$ は面外せん断応力が三次元弾性理論の応力の平衡方程式を満足するように求める。

また、ZIG-ZAG 関数の勾配 $\beta_u^{(k)}, \beta_v^{(k)}$ の計算においては、外側弱層、すなわち、上端の第1層と下端の第 N_l 層において面外せん断弾性定数が $\bar{Q}_{ii}^{(1)} < \bar{Q}_{ii}^{(2)}$ あるいは $\bar{Q}_{ii}^{(N_l)} < \bar{Q}_{ii}^{(N_l-1)}$ となるときには、 $\bar{Q}_{ii}^{(1)}$ あるいは $\bar{Q}_{ii}^{(N_l)}$ を次のように修正する ($i=4,5$)。

$$\left. \begin{array}{l} \bar{Q}_{ii}^{(1)} < \bar{Q}_{ii}^{(2)} \text{ の場合: } \bar{Q}_{ii}^{(1)} = \bar{Q}_{ii}^{(2)} \\ \bar{Q}_{ii}^{(N_l)} < \bar{Q}_{ii}^{(N_l-1)} \text{ の場合: } \bar{Q}_{ii}^{(N_l)} = \bar{Q}_{ii}^{(N_l-1)} \end{array} \right\} (6)$$

3. ZIG-ZAG 変位を考慮した三次せん断変形理論の変位場

本研究では、各種の ZIG-ZAG 理論の変位場を検討するために、まず変位の3成分に完全な三次せん断変形理論の変位場を用い、この3成分に ZIG-ZAG 項を付加して定式化を行う。その他の変位場を用いる ZIG-ZAG 理論については、使用しない変位成分を連立方程式から削除して級数解を求める方法⁴⁾を用いて計算を行う。

第 k 層の変位成分を、完全な三次せん断変形理論の変位場に ZIG-ZAG 項を付加して次式で表す。

$$\begin{aligned} u^{(k)} &= u_0 + z u_1 + z^2 u_2 + z^3 u_3 + \phi_u^{(k)} \psi_u \\ v^{(k)} &= v_0 + z v_1 + z^2 v_2 + z^3 v_3 + \phi_v^{(k)} \psi_v \\ w^{(k)} &= w_0 + z w_1 + z^2 w_2 + z^3 w_3 + \phi_w^{(k)} \psi_w \end{aligned} (7)$$

ここに、 u_i, v_i, w_i は中央面 ($z=0$) における並進変位の成分で、 ψ_u, ψ_v, ψ_w が ZIG-ZAG 変位である。また、 $\phi_u^{(k)}, \phi_v^{(k)}, \phi_w^{(k)}$ は式 (5) の ZIG-ZAG 関数である。

式 (6) の変位成分は、等価単層理論 (12 成分) に比べると ZIG-ZAG 変位の3成分が追加されることになが、この ZIG-ZAG 変位の数は積層数に依存しない。また、RZT では、面外変位 w に対する ZIG-ZAG 関数 $\phi_w^{(k)}$ が開発されておらず、 $w^{(k)}$ の変位場には定数項 w_0 のみが用いられている^{3), 5)}。

4. 面外応力の改良

ZIG-ZAG 理論では、変位の連続性は満足されるが、面外応力は等価単層理論と同様に層境界の連続性と境界条件を満足しない。そこで、本研究では三次元弾性理論の応力の平衡方程式から面外応力を計算することにより精度の改善を図る⁴⁾。

三次元弾性理論の応力の平衡方程式から計算した面外応力に層境界の連続性と境界条件を考慮して、第 k 層の座標 z における改良した面外応力 $\tau_{xz}^{*(k)}(z), \tau_{yz}^{*(k)}(z), \sigma_z^{*(k)}(z)$ を、座標 z に関する応力、層境界に関する応力、応力の境界条件に分けて次のように表す。

$$\begin{aligned} \tau_{xz}^{*(k)}(z) &= \tau_{xz}^{(k)}(z) + \bar{\tau}_{xz}^{(k)} + \tau_{xz}^t \\ \tau_{yz}^{*(k)}(z) &= \tau_{yz}^{(k)}(z) + \bar{\tau}_{yz}^{(k)} + \tau_{yz}^t \\ \sigma_z^{*(k)}(z) &= \sigma_z^{(k)}(z) + \bar{\sigma}_z^{(k)} + \sigma_z^t \end{aligned} (8)$$

5. 数値計算例

5.1 計算モデル

計算モデルは、図-1 に示す長さ a 、幅 b 、板厚 h の周辺単純支持された直交積層板であり、形状比を $a/b=1$ とする。層数 $N_l=4$ として繊維配向を $[0/90^\circ/0/90^\circ]$ とする。材料定数には次の値を用いる。

$$\begin{aligned} E_1/E_2 &= 25, \quad E_3 = E_2, \quad G_{12} = G_{13} = 0.5E_2 \\ G_{23} &= 0.2E_2, \quad \nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{23} = 0.25 \end{aligned}$$

荷重は、板上縁に正弦荷重 ($q=q_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}$) を作用させる。また、図-3 に変位と応力の観測点を示す。

本研究では各種の ZIG-ZAG 理論を検討する。モデル名については、「ZZ」を本研究の ZIG-ZAG 理論、「MZ」を Murakami 関数を用いた ZIG-ZAG 理論、「ES」を等価単層理論とし、 w の変位場の採り方に応じて「ZZijW」

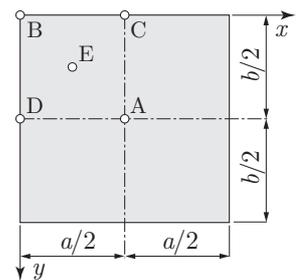
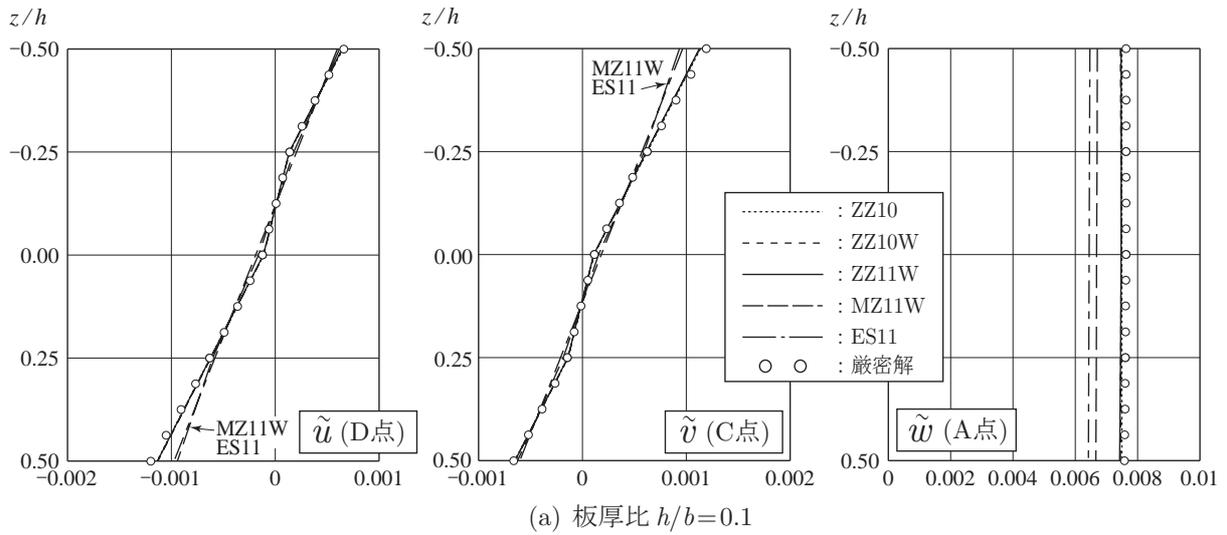
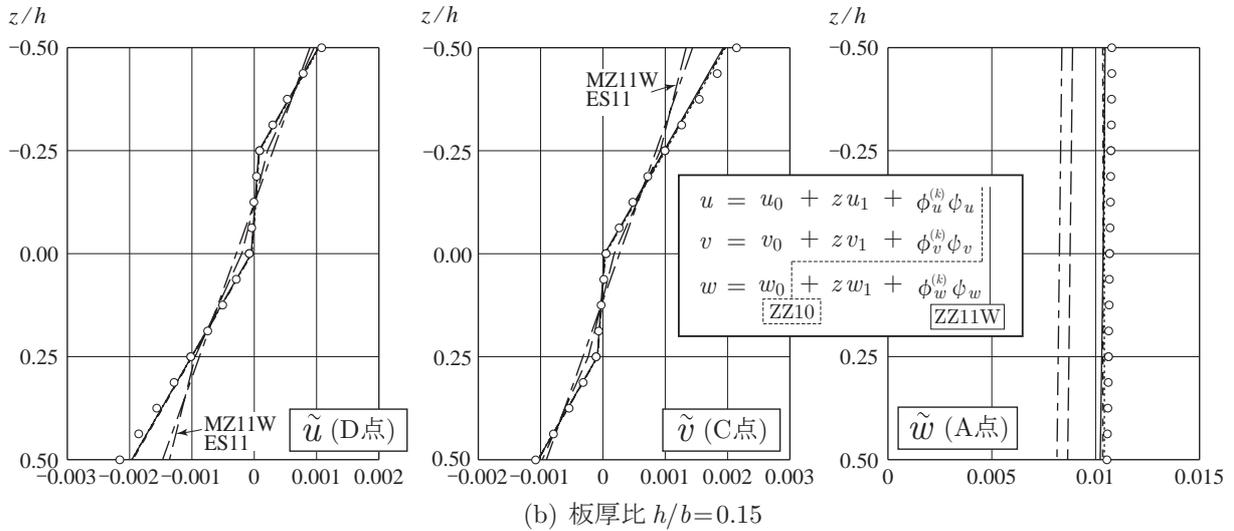


図-3 観測点



(a) 板厚比 $h/b=0.1$



(b) 板厚比 $h/b=0.15$

図-4 変位分布 (一次せん断変形理論型 ZIG-ZAG 理論)

の記号を用いる. i は 1 次または 3 次せん断変形理論を, j は面外変位 w の変位場における z の次数を, W は w の変位場に ZIG-ZAG 項を付加することを意味する.

5.2 ZIG-ZAG 変位

図-4(a),(b) は一次せん断変形理論に基づく ZIG-ZAG 理論を用いた板厚比 $h/b=0.1$ と 0.15 の変位 u, v, w の板厚方向の分布図であり, 縦軸には座標 z を, 横軸には変位を無次元化して示している. 点線が ZZ10, 短い破線が ZZ10W, 実線が ZZ11W の計算結果で, 破線が Murakami 関数を用いた MZ11W, 一点鎖線が等価単層理論 ES11 の結果で, \circ 印が厳密解⁶⁾ である.

図より, 面内変位 u, v には ZIG-ZAG 変位が生じており, 板厚比が大きくなると ZIG-ZAG 変位も大きくなる. 本研究の ZIG-ZAG 理論では, ZZ10, ZZ10W, ZZ11W と変位場の採り方を変えても大きな違いは無く, 図 (b) の板厚比 $h/b=0.15$ でも厳密解と良く一致した解が得られている. それに対して, Murakami 関数を用いた MZ11W では ZIG-ZAG 分布とならずに等価単層理論 ES11 と同様に板厚内でほぼ直線分布となって, 変位

u の下端あるいは変位 v の上端で誤差が大きくなっている. また, 変位 w についても, Murakami 関数を用いた MZ11W と等価単層理論 ES11 の計算値は, 厳密解に対して誤差が大きくなっている.

図-5(a),(b) は三次せん断変形理論に基づく ZIG-ZAG 理論を用いた板厚比 $h/b=0.3$ と 0.4 の変位 u, v, w の板厚方向の分布図である. 点線が ZZ30, 短い破線が ZZ31W, 実線が ZZ33W の計算結果で, 破線が Murakami 関数を用いた MZ33W, 一点鎖線が等価単層理論 ES33 の結果である.

板厚比がさらに大きくなると, ZIG-ZAG 変位は曲線分布となり, 3 次式を用いる等価単層理論 ES33 では誤差が大きくなる. また, RZT⁵⁾ で用いられている w の変位場に定数項のみを用いる ZZ30 では, 図 (b) の $t/b=0.4$ で誤差が大きくなっているが, w の変位場に 1 次式までの項を用いて ZIG-ZAG 項を付加した ZZ31W と, w の変位場に 3 次式までの項を用いて ZIG-ZAG 項を付加した ZZ33W では厳密解と良く一致した計算値が得られている.

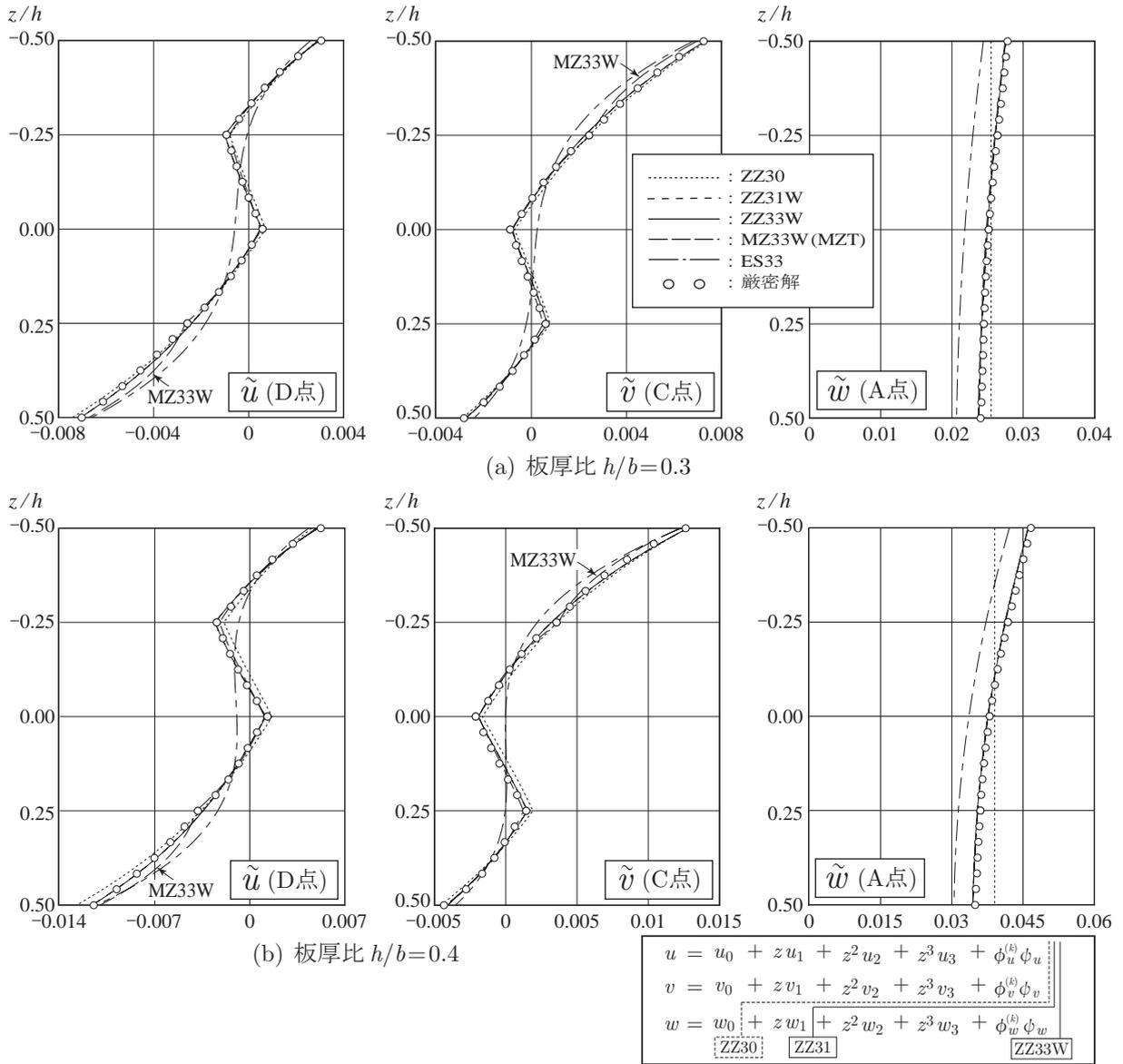


図-5 変位分布 (三次せん断変形理論型 ZIG-ZAG 理論)

一方, Murakami 関数を用いる MZ33W では, 図-4 の一次せん断変形理論型の ZIG-ZAG 理論と同様に u の下端や v の上端で誤差が大きくなっている。これは, 式 (3) から明らかのように, Murakami 関数では隣接する層の ZIG-ZAG 関数の勾配を異符号になるように強制しており, 外側弱層の影響を考慮できないためである。

6. まとめ

Tessler らの Refined ZIG-ZAG 理論の ZIG-ZAG 関数を等方性平板にも適用できるように改良し, 厚板解析に有効な面外変位 w に対する ZIG-ZAG 関数を開発した。この新たな ZIG-ZAG 関数を用いた ZIG-ZAG 理論を直交積層板の曲げ解析に用いた結果より, 厚板領域においても十分な精度で ZIG-ZAG 変位を計算できることが分かった。

参考文献

- 1) Carrera, E.: Historical review of zig-zag theories for multilayered plates and shells, *Appl. Mech. Rev.*, Vol.56, pp.287-308, 2003.
- 2) Murakami, H.: Laminated composite plate theory with improved in-plane responses, *Journal of Applied Mechanics*, Vol.53, pp.661-666, 1986.
- 3) Tessler, A., Di Sciuva, M. and Gherlone, M.: Refined zigzag theory for laminated composite and sandwich plates, Technical Publication 215561, National Aeronautics and Space Administration, 2009.
- 4) 渡辺 力: 等価単層理論に基づく各種の厚板理論による異方性積層板の級数解ならびに面外応力の改良, 構造工学論文集, Vol.63A, pp.14-27, 2017.
- 5) Groh, R.M.J. and Weaver, P.M.: A computationally efficient 2D model for inherently equilibrated 3D stress predictions in heterogeneously laminated plates. Part II: Model formulation, *Composite Structures*, Vol.156, pp.171-185, 2016.
- 6) Pagano, N.J.: Exact solutions for rectangular bidirectional composites and sandwich mates, *J. Compos. Mater.*, Vol.4, pp.20-34, 1970.