

波状道路の形成理論

The formation of a washboard road

北海道大学工学部環境社会工学科 ○学生員 瀧上直斗 (Naoto Takigami)
 北海道大学大学院工学研究院 正員 泉典洋 (Norihito Izumi)

1. はじめに

自動車が通過する未塗装道路等、浸食されやすい道路には波状の凹凸が形成されることがある。北海道においても、雪氷の路面に波状の凹凸が形成されるそばん道路と呼ばれる現象が顕著に見られる。また、新幹線のレールに波状の凹凸が発生するレール波状摩耗と呼ばれる現象も存在し、多岐に渡ってこのような凹凸の発生が見られる。この凹凸の発生は通行不良を引き起こし、交通渋滞のみならず事故・災害を起こす危険な現象である。しかし、未だその凹凸の発生原因について解明されていないのが事実である。この危険な波状道路による事故を防ぐため、その形成メカニズムを知ることが必要不可欠である。そこで、本研究はこのような波状道路の形成を説明するための理論の構築を試みる。本研究はモデル化した自動車が走る、微小な波状擾乱を与えた地面を考える。ただし、地面の材質についてはその圧縮性などを無視し考えないものとし、この地面が車から力を受け侵食と土砂輸送が起こるとする。また侵食と土砂輸送に関しても簡単なモデルを用い、それらにより波状道路が形成されると考える。このような仮定の下、侵食と土砂輸送についてそれぞれが卓越する場合において線形安定解析を行い、波状擾乱の発達する条件を調べる。

2. モデル

道路を走行する自動車を図1に示すような質量 m の物体および鉛直下向きに伸びた脚、脚の先についた小さな車輪でモデル化する。この脚と車輪は軽く、質量は無視できるとする。また、物体はこの小さな車輪で走行するが、車輪は十分小さいとして物体と地面は点で接していると仮定する。脚にはバネとダンパーがついており、

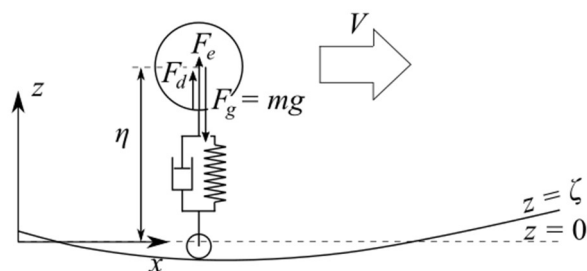


図1. 自動車モデルの概念図

物体の鉛直運動によって伸びたり縮んだりする。この自

動車をモデル化した物体と脚、車輪をここでは車モデルまたは単に車と呼び、物体を車体モデルまたは単に車体と呼ぶことにする。

いま、車は一定速度 V で左から右に地面に沿って走行しているとする。水平方向に x 軸、鉛直方向に z 軸を取り、車体の質量中心の x 座標を ξ 、 z 座標を η とする。地面の形状を $\zeta(x)$ とすると、車が地面に沿って走行した距離 s と x 座標との関係と、走行時間を t としたときの、 $s(x) = Vt$ の関係から、ある時刻 t における車の位置の x 座標 ξ は、次式を解いて得られる。

$$\int_0^\xi \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)^2} dx = Vt \quad (1)$$

車が起伏を持った地面を走行するとき、車体は鉛直方向にも運動する。その運動は次のように記述できる。車体に働く力は、重力 $F_g (= mg)$ およびバネによる力 F_e 、ダンパーによる力 F_d である。地面の高さを $z = \zeta$ とすると、車体の質量中心から地面までの距離は $\eta - \zeta$ となる。バネ係数を k 、自然状態（何も力がかからず運動していない状態での）車体の質量中心から地面までの距離を h とすると、車体に働くバネによる力 F_e は次のように表すことができる。

$$F_e = -k[(\eta - \zeta) - h] \quad (2)$$

減衰係数を b とすると、ダンパーによる力 F_d は次式で表される

$$F_d = -b(\dot{\eta} - \dot{\zeta}) \quad (3)$$

ここで $\dot{}$ は時間微分を表す。

以上より、車体の鉛直方向の運動方程式は次のように表される。

$$m\ddot{\eta} = -mg - k[(\eta - \zeta) - h] - b(\dot{\eta} - \dot{\zeta}) \quad (4)$$

ここでバネ係数を k 、自然状態（何も力がかからず運動していない状態での）車体の質量中心から地面までの距離を h とする。地面の形状 ζ を与え、上式を適当な初期条件の下で解けば、ある時刻 t における車体の

位置の z 座標 η が得られる.

3. 地面が平坦である場合

いま地面が平坦であるとする, $\zeta = 0$ であり, 式 (1) は次のようになる.

$$\xi = Vt \quad (5)$$

上式は, 車が x の正方向に等速 V で進んで行くことを意味している. 地面が平坦であるとき, たとえ最初は車体が上下に揺れていたとしても, 十分時間が経過した後は, 車体の高さ η は時間とともに変化しない一定値に漸近する (図 2 参照). その一定値を η_0 と表すと, 式 (2) は次の様になる.

$$-mg - k(\eta_0 - h) = 0 \quad (6)$$

これを解くと車体の高さ η_0 は次のように得られる.

$$\eta_0 = h - \frac{mg}{k} \quad (7)$$

上式は脚が自然長 h より mg/k だけ収縮していることを意味している. このバネの収縮によって地面が受ける鉛直下向きの抗力 N は, 車体に働くバネによる力と大きさは同じで向きは逆となる. したがって, 次の様になる.

$$N = -k(\eta_0 - h) \quad (8)$$

式 (6) からわかるように上式は次のように表される.

$$N = mg \quad (9)$$

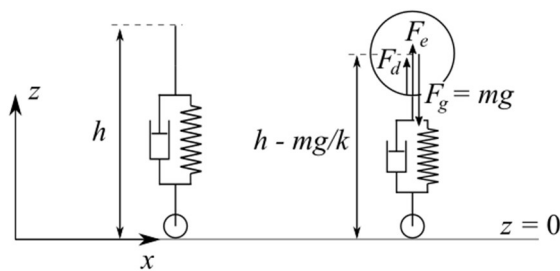


図 2. 平坦な地面を走る自動車の概念図

4. 地面に微小な波状擾乱を与えた場合

4.1 車体の上下動

前節の平坦な地面に微小な波状擾乱を与えることを考える. 波状の擾乱を x の関数として次のように表す.

$$\zeta = A\zeta_1 e^{i\alpha x} \quad (10)$$

ここで A は擾乱の振幅であり微小とする. また α は擾

乱の波数であり, 波長 λ を用いて次式で定義される.

$$\alpha = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (11)$$

車が $x = \xi$ を走っているとき, 車が時刻 t において走行している位置での地面の高さ ζ は次のように表すことができる.

$$\zeta = A\zeta_1 e^{i\alpha Vt} \quad (12)$$

底面に与えた擾乱に対応して車体の高さ η も次の様に展開する.

$$\eta = \eta_0 + A\eta_1 e^{i\alpha Vt} \quad (13)$$

式(12)および(13)を支配方程式(2)に代入し, A のオーダーで整理すると, $O(A)$ では次式が得られる.

$$-\alpha^2 V^2 m \eta_1 + i\alpha V b (\eta_1 - \zeta_1) + k(\eta_1 - \zeta_1) = 0 \quad (14)$$

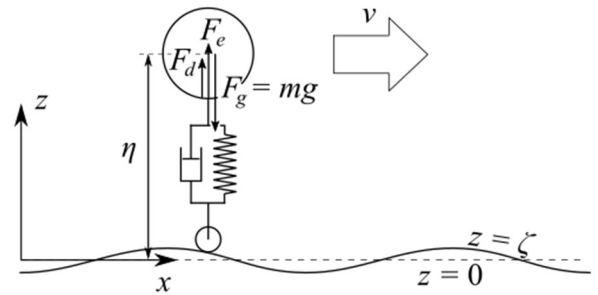


図 3. 波状の地面を走る車の概念図

上式を η_1 について解くと, 次式が得られる.

$$\eta_1 = \left(\frac{k(k - \alpha^2 V^2 m) + \alpha^2 V^2 b^2}{(k - \alpha^2 V^2)^2 + \alpha^2 V^2 b^2} - i \frac{\alpha^3 V^3 b m}{(k - \alpha^2 V^2)^2 + \alpha^2 V^2 b^2} \right) \zeta_1 \quad (15)$$

上式は地面の形状 ζ に微小な擾乱が与えられたときの車体の上下動を表している.

4.2 地面が受ける力

車が通過する際に地面が車から受ける力を考える. 地面が車から受ける鉛直下向きの力 F_z は車体がバネとダンパーから受ける力と大きさは等しく向きは逆になる. したがって次のように表される.

$$F_z = -b(\dot{\eta} - \dot{\zeta}) - k(\eta - \zeta - h) \quad (16)$$

地面の局所勾配角を θ とすると, 地面が法線方向下向きに受ける力 F_n は次のように表される.

$$F_n = F_z \cos \theta \quad (17)$$

ここで $\cos \theta$ は地面の形状 ζ を用いて次のように表される。

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)^2}} \quad (18)$$

上式に式 (10) を代入し、 A の 2 次以上のオーダーの項を無視すると、 $\cos \theta = 1$ が得られる。したがって地面が法線方向下向きに受ける力 F_n は次式で表される。

$$F_n = -b(\dot{\eta} - \dot{\zeta}) - k(\eta - \zeta - h) \quad (19)$$

式 (4) より上式は次のようになる。

$$F_n = mg + m\ddot{\eta} \quad (20)$$

F_n についても次のように展開する。

$$F_n = F_{n0} + AF_{n1}e^{i\alpha V t} \quad (21)$$

上式と (13) を式 (20) に代入して A について整理すると、 $O(1)$ および $O(A)$ においてそれぞれ次式が得られる。

$$F_{n0} = mg \quad (22)$$

$$F_{n1} = -\alpha^2 V^2 m \eta_1 \quad (23)$$

$$F_n(t) = mg - A\alpha^2 V^2 m \eta_1 e^{i\alpha V t} \quad (24)$$

これが一台の車が時刻 t において地面に与える法線方向下向きの力である。 F_n を $\xi = Vt$ および $x = \xi$ の関係を用いて位置 x の関数に変換すると、1 台の車が通過する際、位置 x において地面に与える法線方向下向きの力 $F_n(x)$ が次のように得られる。

$$F_n(x) = mg - A\alpha^2 V^2 m \eta_1 e^{i\alpha x} \quad (25)$$

5. 地面の侵食と土砂移動

車輪が回転する際、軸に発生する摩擦やタイヤの変形等によってエネルギー損失が発生し、車は地面から接線方向進行方向と逆向きに力を受ける。これを回転摩擦力と呼び、 $F_t(x)$ と表す。 $F_t(x)$ は、地面が車に及ぼす法線方向の抗力に回転摩擦係数 C_{rr} を掛けて表される。地面が車に及ぼす法線方向の抗力は、地面が車から受ける法線方向下向きの力 $F_n(x)$ と大きさは等しく向きは逆である。したがって $F_n(x)$ を用いて次のように表されたとする。

$$F_t(x) = C_{rr} F_n(x) \quad (26)$$

車を等速で運動させるためには、この力と等しい力を与え続けなければならない。その力は地面が車輪を押す

力であり、これは車輪が地面を蹴ることによって、その力の反作用として得られる。すなわち、車が等速で運動している場合、 $F_t(x)$ に等しい力で地面に対して法線方向に進行方向に車は地面から力を受けており、その反作用によって車は地面に対して法線方向に進行方向と逆向きに力を及ぼしている。車一台が通過すると $F_t(x)$ の力が地面に対して進行方向と逆向き ($-x$ 向き) に与えられる。同じ車が何台も繰り返し通過する状況を考える。通過する車の数は一定で、単位時間当たり n であるとする。ある地点 x の地面が受ける単位時間当たりの接線方向の力 τ_b は次式で表される。

$$\tau_b = n F_t(x) \quad (27)$$

一台の車が地面に与えるせん断力を F_t とすると、ある地点 x の地面が受ける単位時間当たりの接線方向の力は $n F_t(x)$ である。地面の表面は侵食される土や移動する砂で構成されており、地面に働く力によって侵食されるとする。侵食や土砂の移動がどのように起こるかについて詳しい力学機構を考え始めるとかなり複雑である。したがって、それについてここでは置いておいて、簡単なモデルを考える。侵食や土砂の移動が地面接線方向に働くせん断力 F_t によって生じると仮定する。すなわち単位時間当たりの侵食量 E および土砂移動量 q を次のように表す。

$$E = f \tau_b^\gamma \quad (28)$$

$$q = -c \tau_b^\sigma \quad (29)$$

ここで f および γ 、 c 、 σ は経験的に決まる定数である。問題を簡単にするために γ および σ は 1 と仮定する。また、車輪の回転によって地面は車の進行方向とは逆向きにせん断力を受けることから、土砂移動も車の進行方向とは逆向き ($-x$ 方向) に生じること注意到する。これまで地面の形状は物体が移動する時間スケールでは変化しないと考えてきたが、以降、車による力によって地面表面の形状が変化すると考える。ただし、地面の形状の変化は車の移動と比較すると十分ゆっくりである。そこで、ゆっくりとした時間を表す新たな変数 T を導入する。

そこで侵食および土砂移動による地面形状の変化はそれぞれ次式で表されたとする。

$$(1 - \lambda_p) \frac{\partial \zeta}{\partial T} = -E = f \tau_b \quad (30)$$

$$(1 - \lambda_p) \frac{\partial \zeta}{\partial T} = -\frac{\partial q}{\partial x} = c \frac{\partial \tau_b}{\partial x} \quad (31)$$

6. 波状道路形成の線形安定解析

4 章で得られた地面が車から受ける力と、5 章で得られた地面の変形を表す式を用いて、波状道路の形成に関する線形安定解析を行う。地面の形状は次式で表される。

$$\zeta = A\zeta_1 e^{i(kx - \omega T)} \quad (32)$$

それによって生じるせん断力は次式で表される.

$$\begin{aligned} \tau_b &= nC_{rr} \left\{ mg \right. \\ &\quad - A\alpha^2 V^2 m \left[\frac{k(k - \alpha^2 V^2 m) + \alpha^2 V^2 b^2}{(k - \alpha^2 V^2)^2 + \alpha^2 V^2 b^2} \right. \\ &\quad \left. \left. - i \frac{\alpha^3 V^3 b m}{(k - \alpha^2 V^2)^2 + \alpha^2 V^2 b^2} \right] \zeta_1 e^{i(kx - \omega T)} \right\} \end{aligned} \quad (33)$$

6.1 侵食が卓越する場合

式 (32) および (33) を (30) に代入し, それを A のオーダーで整理すると, $O(A)$ において次式が得られる.

$$\begin{aligned} &-(1 - \lambda_p)i\omega \\ &= -fnC_{rr}\alpha^2 V^2 m \left[\frac{k(k - \alpha^2 V^2 m) + \alpha^2 V^2 b^2}{(k - \alpha^2 V^2)^2 + \alpha^2 V^2 b^2} \right. \\ &\quad \left. - i \frac{\alpha^3 V^3 b m}{(k - \alpha^2 V^2)^2 + \alpha^2 V^2 b^2} \right] \end{aligned} \quad (34)$$

ここで $\omega = \omega_r + i\omega_i$ とすると,

$$\omega_r = -\frac{fnC_{rr}\alpha^2 V^2 m}{(1 - \lambda_p)} \left[\frac{\alpha^3 V^3 b m}{(k - \alpha^2 V^2)^2 + \alpha^2 V^2 b^2} \right] \quad (35)$$

$$\omega_i = -\frac{fnC_{rr}\alpha^2 V^2 m}{(1 - \lambda_p)} \left[\frac{k(k - \alpha^2 V^2 m) + \alpha^2 V^2 b^2}{(k - \alpha^2 V^2)^2 + \alpha^2 V^2 b^2} \right] \quad (36)$$

侵食が卓越する場合, 波状の擾乱は次の条件が成立する場合に成長する.

$$k^2 + \alpha^2 V^2 (b^2 - km) < 0 \quad (37)$$

上式は $b^2 - km > 0$ であれば必ず成立しない. $b^2 - km < 0$ であれば次の範囲で成立する.

$$\alpha < -\frac{k}{V\sqrt{km - b^2}}, \quad \alpha > \frac{k}{V\sqrt{km - b^2}} \quad (38)$$

α は正であるから, 結局次の条件が成立する場合に擾乱は成長する.

$$b^2 < km \quad \alpha > \frac{k}{V\sqrt{km - b^2}} \quad (39)$$

6.2 土砂輸送が卓越する場合

式 (32) および (33) を (31) に代入し, それを A のオーダーで整理すると, $O(A)$ において次式が得られる.

$$\begin{aligned} &-(1 - \lambda_p)i\omega \\ &= iacnC_{rr}\alpha^2 V^2 m \left[\frac{k(k - \alpha^2 V^2 m) + \alpha^2 V^2 b^2}{(k - \alpha^2 V^2)^2 + \alpha^2 V^2 b^2} \right. \\ &\quad \left. - i \frac{\alpha^3 V^3 b m}{(k - \alpha^2 V^2)^2 + \alpha^2 V^2 b^2} \right] \end{aligned} \quad (40)$$

したがって

$$\omega_r = -\frac{cnC_{rr}\alpha^3 V^2 m}{(1 - \lambda_p)} \left[\frac{k(k - \alpha^2 V^2 m) + \alpha^2 V^2 b^2}{(k - \alpha^2 V^2)^2 + \alpha^2 V^2 b^2} \right] \quad (41)$$

$$\omega_i = \frac{cnC_{rr}\alpha^3 V^2 m}{(1 - \lambda_p)} \left[\frac{\alpha^3 V^3 b m}{(k - \alpha^2 V^2)^2 + \alpha^2 V^2 b^2} \right] \quad (42)$$

土砂輸送が卓越する場合, 波状の擾乱は無条件で発達することが分かる.

7. 結果と考察

地面に微小な波状擾乱を与えた場合に地面が車から受ける力によって侵食および土砂輸送が起き, それらにより地面の変形が起こると仮定し, 地面の形状に対し波状道路形成に関する線形安定解析を行った. その結果, 侵食が卓越する場合は

$$b^2 < km \quad \text{かつ} \quad \alpha > \frac{k}{V\sqrt{km - b^2}} \quad \text{式(39) の条件が}$$

成り立つ場合に擾乱は成長し, 土砂輸送が卓越する場合は無条件に擾乱が発達することが分かった.

侵食が卓越する場合の擾乱が発達する条件式(38)の 1 目から, ダンパーの減衰係数 b , バネ係数 k , 車体の質量 m の関係が表された. つまり, ダンパーの減衰効果 (b^2) が車体の質量とバネ定数の影響に比べて小さいときに擾乱は発達する. また, 式(39)の 2 目目の式から擾乱の波数 α , バネ定数 k , 車の速度 V , ダンパーの減衰係数 b , 車の質量 m の関係がわかった. すなわち, 波数 α がある値より大きくなるときに擾乱は発達すると考えられる.

8. まとめ

地面に与えた波状擾乱の発達する条件を求めることができた. 今後はこの条件を何らかの無次元パラメータを用いて表し, その条件物理的意味を明らかにする. また, 擾乱の発達を表す ω_i と波数 α の関係をグラフで示し, 擾乱のスケールやピーク, 実際の値との近似性を明らかにする. さらに, 地面の材質, 圧縮性などに関してより具体的なモデルを考える. そして理論の構築の後, 簡単な実験を行い理論と実験の整合性を確かめる.

9. 参考文献

・ Percier, Baptiste; Manneville, Sebastien; Taberlet, Nicolas: Modeling a washboard road: From experimental measurements to linear stability analysis : Web Of Science Core Collection(2013)