D－３３ 平成28年度　土木学会北海道支部　論文報告集　第73号

リンク間相関のある確率的移動時間を考慮した最短経路探索アルゴリズム

Reliable path finding algorithm for a correlated network with stochastic travel time

北海道大学工学部　○学生員　河向隆志 (Takashi Kawamukai)
北海道大学大学院工学研究院　正会員　内田賢悦 (Kenetsu Uchida)

1.　はじめに

都市交通が抱える問題の一つに，交通混雑が挙げられる[1]．交通混雑によって移動時間の長期化，輸送コストの増加，交通事故の増加等が引き起こされ，社会に大きな損失をもたらしている．交通混雑を解消する手段としては，混雑費用，時差出勤等，交通量を減少させるないしは分散させる手段がとられているが，いずれも完全に定着するまでには至っていない．

将来も加味した正確な交通量予測を実現するためには，精度の高い交通量配分手法が欠かせない．また道路ネットワークはさまざまな不確実性に曝されているため，移動時間を確率変数として捉えるのが妥当であろう．そうした不確実な交通状況の中でドライバーは，移動時間の平均だけではなくそのバラツキも考慮して経路選択を行うと考えられる．そのため，交通量配分においては，移動時間の不確実性を考慮した最短経路探索アルゴリズムが要求される．だが，既往アルゴリズムでは移動時間を定数としたものが多く，確率変数として扱うものもいくつか存在するが，リンク間相関関係は限られた範囲でしか考慮していなかった．

以上より，本研究では，ネットワーク内の確率的移動時間の平均とバラツキ指標から構成される一般化移動時間が最小となるような経路を探索するアルゴリズムを提案する．

2.　既存研究のレビュー

Khani and Boyles (2015)[2]は，独立な確率的リンク移動時間を仮定したネットワークを対象に， 2 種類の一般化移動時間最小化問題，すなわち，平均-標準偏差問題と平均-分散問題を提案した．前者は，経路の一般化移動時間はその経路を構成するリンクの一般化移動時間の和とはならず，加法性が成立しない問題となる．一方，後者はリンク間の独立性が仮定されているため，加法性が成立する問題となる．彼らは，後者の問題に幾つかの条件を付与すると，前者の問題と等価な問題に帰着できることを証明するとともに，加法性の成立しない平均-標準偏差問題を解くアルゴリズムを提案した．

既往研究に，全てのリンクとの相関を考慮した最短経路探索アルゴリズムが存在しないことは既に述べた通りである．だが，限られた範囲内のリンク間の相関を考慮した研究としては，例えば Shahabi et al (2013)[3]が挙げられる．そこでは共分散を考慮した 2 種類の問題が示され，それぞれの最適解が存在する範囲の上限及び下限を与えている．数値計算を繰り返すことで最適解の存在する範囲は徐々に狭まり，ある値に収束することが示された．

3.　問題の定式化

3.1　仮定

・　ネットワーク上のリンク移動時間は，確率分布に従い，すべてのリンク間で相関関係を有する．
・　リンク間の移動時間の相関は非負である．

3.2　記号

A ：　実ネットワークにおけるリンクの集合
I ：　実ネットワークにおける OD ペアの集合
A_j ：　実ネットワークの経路$j \in J_i$ を形成するリンク集合
J_i ：　OD ペア$i \in I$ 内の経路の集合
$\tilde{A}^d$ ：　拡張ネットワークにおけるダミーリンクの集合
$\tilde{A}^r$ ：　拡張ネットワークにおける実リンク集合
a_j^m ：　拡張ネットワークの経路$j \in J_i$ 上の実リンクを経路の起点から終点に向かって数えたとき， m番目に位置する実リンク
$\tilde{a}_j^{m,m-1}$ ：　拡張ネットワークの経路$j \in J_i$ 上の実リンクを経路の起点から終点に向かって数えたとき，$m-1$番目とm番目の実リンク間を結ぶダミーリンク
$|A_j|$ ：　A_jのリンク数
t_a ：　リンク$a \in A$の確率的移動時間
μ_a ：　t_aの平均
σ_a^2 ：　t_aの分散
σ_{ab} ：　リンクa,bの移動時間t_a, t_bの共分散
δ_{aj} ：　リンク$a \in A$が経路$j \in J_i$上に存在すれば 1，そうでなければ 0 をとる変数
c_{ij} ：　OD ペア$i \in I$，経路$j \in J_i$とした平均-標準偏差問題 P1 における一般化移動時間
$\hat{c}_{ij}$ ：　OD ペア$i \in I$，経路$j \in J_i$とした平均-分散問題 P2 における一般化移動時間
c_i^* ：　OD ペア$i \in I$の平均-標準偏差問題 P1 における一般化移動時間の最小値
$\hat{c}_i^*$ ：　OD ペア$i \in I$の平均-分散問題 P2 における一般化移動時間の最小値
$r(a)$ ：リンク$a \in A$の起点ノード
$s(a)$ ：リンク$a \in A$の終点ノード
m_n ：　拡張ネットワークにて，ある起点ノードからの暫定的な最短経路上のノードnまでの移動時間の

平均

v_n： 拡張ネットワークにて，ある起点ノードからの暫定的な最短経路上のノードnまでの移動時間の分散

g_n： ある起点ノードから暫定的な最短経路上のノードnまでの一般化移動時間

c_a^g： リンク$a \in A$を通過する際発生する機会費用

4. 最小化問題の定式化

ここでは，説明を容易にするため，あらかじめ経路が列挙されている場合の最短経路探索問題に着目した議論を展開する．

4.1 平均-標準偏差問題 P1

OD ペア$i \in I$，経路$j \in J_i$における一般化移動時間c_{ij}を以下のように定義する．

$$c_{ij} = \sum_{a \in A} \mu_a \cdot \delta_{aj} + \lambda \sqrt{\sum_{a \in A} \sigma_a^2 \cdot \delta_{aj} + 2 \sum_{a \in A} \sum_{b \in A} \delta_{aj} \cdot \delta_{bj} \cdot \sigma_{ab}} \quad \forall i \in I, \forall j \in J_i \qquad (1)$$

ここに，λはパラメータである．このとき，c_{ij}が最小となるような経路をドライバーは選択すると考えられるので，最小化問題 P1 は以下の式(2)のように表せる．

P1: $$j^* = \operatorname{argmin} c_{ij} \quad \forall i \in I \qquad (2)$$

4.2 平均-分散問題 P2

OD ペア$i \in I$，経路$j \in J_i$における一般化移動時間$\hat{c}_{ij}$を以下のように定義する．

$$\hat{c}_{ij} = \sum_{a \in A} \mu_a \cdot \delta_{aj} + \gamma \left(\sum_{a \in A} \sigma_a^2 \cdot \delta_{aj} + 2 \sum_{a \in A} \sum_{b \in A} \delta_{aj} \cdot \delta_{bj} \cdot \sigma_{ab} \right) \quad \forall i \in I, \forall j \in J_i \qquad (3)$$

ここに，γはパラメータである．このとき，$\hat{c}_{ij}$が最小となるような経路をドライバーは選択すると考えられるので，最小化問題 P2 は以下の式(4)のように表せる．

P2: $$j^* = \operatorname{argmin} \hat{c}_{ij} \quad \forall i \in I \qquad (4)$$

4.3 2 種類の問題の比較

P1 は不確実性が標準偏差の形で表されているため，加法性は成立しない問題となっている．そのため，リンク移動時間が互いに独立な確率分布に従っている場合であっても，解析的に解くことはできない．

P2 は P1 と異なり，リンク移動時間が互いに独立な確率変数に従っている場合に限り，加法性が成立する問題となるため，解析的に解くことができる．一方，リンク間の独立性が保証されない場合，P2 では加法性が成立せず，この場合，P1 と同様に解析的に解くことができない問題と認識されてきた．

Khani and Boyles (2015)[2)]は，リンク移動時間が互いに独立な確率変数に従っている場合，以下に示す命題が成立することを証明した．

「λを所与とする P1 の解は，そのλに対応するγを用いた P2 の解と一致する．また，その逆の関係は必ずしも成り立たない．」

さらに，彼らは上記の命題に基づいた，P1 の解法アルゴリズムを提案している．ここで，彼らが提案したアルゴリズムは，リンク移動時間が互いに独立な確率変数に従っている場合にのみ有効であることに留意されたい．

そこで以下では，リンク移動時間間に相関のある場合であっても 5 章に示すようにネットワーク表現を工夫することによって，P2 は加法性の成立する問題として定式化できることを示す．その後，上記の命題に基づいた P2 の解法アルゴリズムを開発する．

5. ネットワーク表現

ここでは，確率的リンク移動時間の共分散を表現するためのネットワーク表現を考える，例として，図-1 に示すネットワークをとりあげる．

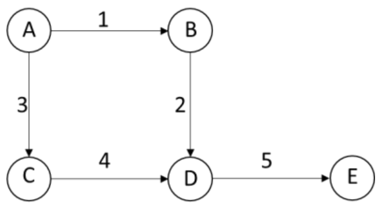

図-1 ネットワークの例

ここに，A,B,⋯,E はノードを表しており，うちノード A を起点ノード，ノード E を終点ノードとし，数字はリンク番号とする．

しかし，後述するが，平均，分散，共分散の情報を初めから 1 つのリンクに割り当てて P2 における最短経路探索を行うことは不可能である．

そこで，交差点遅れの表現等でよく用いられるダミーノード及びダミーリンクを利用して，ネットワークを次のページの図-2 に示す拡張ネットワークに変換することを考える[4)]．図-2 において，実線が実リンク，破線がダミーリンク，円が実ノード，四角形(a,b,c)がダミーノードである．実リンクにはその移動時間の平均と分散を割り当て，ダミーリンクにはリンク移動時間間の共分散を動的に割り当てる．また，起点から終点に向かって経路を通過する際には，初めに実リンクを通過し，その後はダミーリンクと実リンクを交互に通過することになる．

以上から，拡張ネットワーク上の任意の経路jにおいては，リンクの終点ノードが起点とならないm番目と$m-1$番目の実リンクa_j^m, a_j^{m-1}の間には 1 本のダミーリンク$\tilde{a}_j^{m,m-1}$のみが存在する．そのダミーリンクよりも前に通過した実リンクの集合をA_j^{m-1}とすると，$a \in A_j^{m-1}$とa_j^mの共分散の総和は$\sum_{a \in A_j^{m-1}} \sigma_{a_j^m, a}$と表現される．この値をダミーリンクに割り当てることになる．

さらにこの拡張によって，式(7)に後述するが実リンクa_j^mの共分散の総和$\sum_{a \in A_j^{m-1}} \sigma_{a_j^m, a}$の項が加法性を保ちながら追加される．既往研究では，全てのリンクの相関を考慮していなかったがために，Bellman の最適性原理

が満たされていなかった．しかし，共分散をダミーリンクに割り当てることで Bellman の最適性原理が満たされることとなり，この問題は簡単な最短経路探索問題に帰着される．

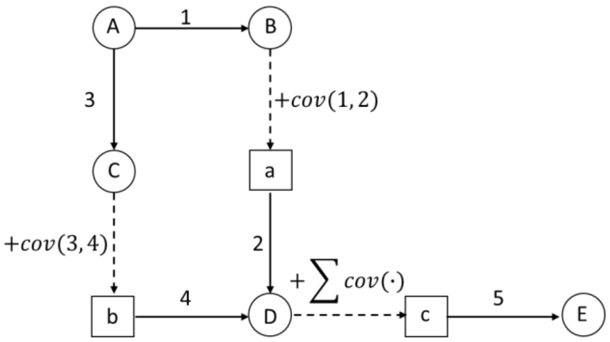

図-2 拡張ネットワーク

6. 最短経路探索アルゴリズム

ここでは，Khani and Boyles (2015)を参考に，実際に最短経路問題を解く際の手順について説明する．

まず，P2 を以下のように変形する．

$$j^* = \arg\min \hat{c}_{ij} = \sum_{m=1}^{|A_j|} \mu_{a_j^m} + \gamma \left\{ \sum_{m=1}^{|A_j|} \left(\sigma_{a_j^m}^2 + 2\hat{\sigma}_{a_j^m,a} \right) \right\}$$

$$\leftrightarrow \quad j^* = \arg\min \alpha \hat{c}_{ij}$$

$$= \alpha \sum_{m=1}^{|A_j|} \mu_{a_j^m} + (1-\alpha) \left\{ \sum_{m=1}^{|A_j|} \sigma_{a_j^m}^2 + 2\hat{\sigma}_{a_j^m,a} \right\}$$

ここに　$\hat{\sigma}_{a_j^m} = \sum_{a \in A_j^{m-1}} \sigma_{a_j^m,a}$　(7)

$$\gamma = \frac{1-\alpha}{\alpha},\ \alpha\text{は定数であり}\ 0 < \alpha < 1$$

以下では，ある経路を対象とした議論を進めるため，下付きのjは省略する．このとき，起点ノードからm番目の実リンクa^mの終点ノード$n = s(a^m)$までの一般化移動時間g_n及びその場合のリンクa^mの機会移動時間$c_{a^m}^g$を導入する．ここに，一般化移動時間は確率的移動時間の平均と分散から構成される値であり，起点ノードからノードnに至るある経路をjと解釈したときの一般化移動時間c_{ij}と見なせる．機会移動時間は他のリンクを通過せずにそのリンクを通過したことによって余計に費やさずに済む移動時間の値である [5]．すると，式(7)よりg_n，$c_{a^m}^g$ は以下のように表される．

$$g_n = \alpha m_n + (1-\alpha) v_n \tag{8}$$

$$c_{a^m}^g = \alpha(\mu_{a^m} + \mu_{\tilde{a}^{m,m-1}}) + (1-\alpha)(\sigma_{a^m}^2 + \hat{\sigma}_{a^m}) + g_{s(a^{m-1})} - g_n \tag{9}$$

ここで，m_nは暫定的な最短経路において，起点ノードからm番目の実リンクa^mの終点ノード$n = s(a^m)$までの確率的移動時間の平均の総和v_nは，起点ノードからノードnまでの確率的移動時間の分散の値の総和として得られる．このとき，機会移動時間が負であれば他のリンクを通過した方が良いことになるから，リンクaが最短経路を構成するリンクである為には，次の条件を満たす必要がある．

$$c_{a^m}^g \geq 0 \ \ \forall a^m \in A \tag{10}$$

言い換えると，式(10)はP2にて最短経路が見つかるための条件となる．k回反復時の最短経路p_i^kで式(10)が満たされなくなる，つまり$c_{a^m}^g < 0$となる場合，その時点で計算している経路は真の最短経路にはなり得ない．式(10)を拡張ネットワークに適用すると，次のようになる．

$$c_{a^m}^g \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha(\mu_{a^m} + \mu_{\tilde{a}^{m,m-1}}) + (1-\alpha)(\sigma_{a^m}^2 + \hat{\sigma}_{a^m}) + g_{r(a^m)} - g_n \ \ \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha(\mu_{a^m} + \mu_{\tilde{a}^{m,m-1}}) + (1-\alpha)(\sigma_{a^m}^2 + \hat{\sigma}_{a^m}) + \alpha m_{r(\tilde{a}^{m,m-1})} + (1-\alpha) v_{r(\tilde{a}^{m,m-1})} - \alpha m_n - (1-\alpha) v_n \ \ \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha \geq \frac{V}{V-M}$$

ここに，$M = m_{s(a^{m-1})} + \mu_{a^m} + \mu_{\tilde{a}^{m,m-1}} - m_n$

$$V = v_n - (v_{s(a^{m-1})} + \sigma_{a^m}^2 + \hat{\sigma}_{a^m})$$

ここから，P2 で最短経路を見つけるためにはαがある閾値以上である必要があり，また式(10)が満たされなくなるたびにαをより大きな値に更新する必要があることが示された．

そこで，定数αを以下の式に従って更新する．

$$\alpha = \min_{a^m \in \tilde{A}^r, \tilde{a}^{m,m-1} \in B} \left[\max\left\{ \frac{V}{V-M}, \alpha_k \right\} \right]$$

ここに　(11)

$$M = m_{s(a^{m-1})} + \mu_{a^m} + \mu_{\tilde{a}^{m,m-1}} - m_n$$

$$V = v_n - (v_{s(a^{m-1})} + \sigma_{a^m}^2 + \hat{\sigma}_{a^m})$$

$$B = \left\{ \tilde{a}^{m,m-1} \in \tilde{A}^d ; s(\tilde{a}^{m,m-1}) = r(a^m) \right\}$$

この更新は，初めは$\alpha = 0$とし，$0 < \alpha < 1$よりαが 1 以上になるまで繰り返す．αが 1 以上になったとき，アルゴリズムは終了する．

これまでは，説明を容易にするため，起終点間の経路が列挙されているとした議論を行ってきた．経路を列挙しない場合のアルゴリズムは，以下に示すとおりである．

0. $k = 0, \alpha_k = 0$ とする．
   OD ペア$\forall i \in I$を設定する．
   $\hat{c}_i^* = \infty$ とする．
   与えられたα_kに対して，P2 をラベリンク法にて解き，OD ペア i の最短経路p_i^kを得る．ここで，起点ノードから他のノードに至る全ての最短経路が得られる．
1. λを与件として，p_i^kにおける P1 の目的関数値c_i^*を計算する．
   もし$c_i < c_i^*$なら，$c_i^* = c_i$及び$p_i^* = p_i^k$とする．
2. 新しいαを，式(11)に従って更新する．
3. もし$\alpha > 1$なら，c_i^*とp_i^*をP1の解として計算終了．
4. $k = k + 1$，$\alpha_k = \alpha$ とする．
   新たなα_kに対して，P2 をラベリンク法にて解き，p_i^kを計算し，ステップ 1．へ戻る．

以上より，このアルゴリズムによって P1 の最短経路を発見することが可能となる．

7. 数値計算例

ここでは，図-3にあるテストネットワークに対して数値計算を行った結果を示す．ただし，$\lambda = 1$とし，リン

クa^mの諸量を表-1 のように設定する.

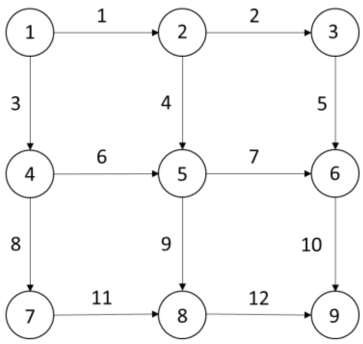

図-3 テストネットワーク

表-1 修正ネットワークのリンクa^mの移動時間

a^m	$r(a^m)$	$s(a^m)$	μ_{a^m}	$\sigma^2_{a^m}$
1	1	2	50	10
2	3	4	70	7
3	1	7	80	6
4	5	9	30	9
5	6	12	40	8
6	8	11	50	10
7	10	13	90	5
8	15	17	50	10
9	14	19	70	7
10	16	22	80	6
11	18	20	90	5
12	21	22	30	9

このネットワークを修正すると，図-4 の通りになる.

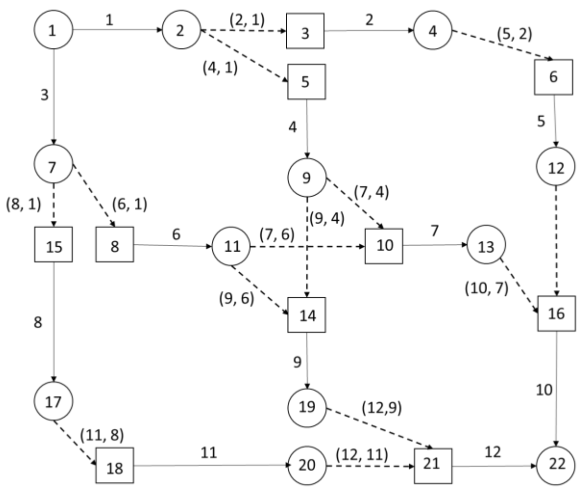

図-4 テストネットワークの修正ネットワーク

ここで，リンク番号の位置は変わっていないが，ノード番号の位置は移っていることに留意されたい.

この数値計算の結果は以下の表-2 のようになる.

表-2 最小移動時間の数値計算結果

反復回数k	1	2	3	4	5	6
移動時間	306.5	256.9	256.9	256.9	187.5	187.5

また，次の表-3 は各ノードへ至る最短経路に関して，そのノードの直前に通過するノードを示している.

表-3 各ノードへの最短経路にて直前に通過するノード

ノード番号	1	2	3	4	5	6	7	8
直前ノード	0	1	2	3	2	4	1	7

ノード番号	9	10	11	12	13	14	15
直前ノード	5	9	8	6	10	9	7

ノード番号	16	17	18	19	20	21	22
直前ノード	12	15	17	14	18	19	21

これより，終点ノードから起点ノードへと遡ると，最短経路はノードを順に 1→2→5→9→14→19→21→22 とたどる経路であることがわかる.

8. まとめ

本研究では，ネットワーク表現を工夫することにより，リンク間に相関のある P2 を加法性の成立する問題として定式化できることを示した．さらに，Khani and Boyles (2015)[2)]が提案した，リンク間に相関がない場合の P2 の解を利用した P1 の求解アルゴリズムを改良することによって，リンク移動時間が互いに相関のある確率変数に従う場合の最短経路探索アルゴリズムを構築した.今後は実ネットワークを対象とした検証を行う必要がある.

9. 参考文献

1） 都市圏の交通渋滞対策 -都市再生のための道路整備- 国土交通省 (2003) p.7 (http://www.mlit.go.jp/common/000043136.pdf)

2） Alireza Khani, Stephen D. Boyles, 2015. An exact algorithm for the mean-standard deviation shortest path problem. Transportation Research Part B 81, 252-266

3） Shahabi, M., Unnikrishman, A., Boyles, S.D., 2013. An outer approximation algorithm for the robust shortest path problem. Transportation Research Part E 58, 52-66

4） Ali Hajbabaie, Rahim F. Benekohal, 2015. A Program for Simultaneous Network Signal Timing Optimization and Traffic Assignment. IEEE TRANSACTIONS ON INTELLIGENT TRANSPORTATION SYSTEMS, VOL. 16, NO. 5, p.2574

5） 鉄道プロジェクトの評価手法マニュアル(2012 年改訂版) - 国土交通省 (2012) pp.257,259 (http://www.mlit.go.jp/common/000224631.pdf)