B－３６　　平成28年度　土木学会北海道支部　論文報告集　第73号

自由表面流における流れの線形安定解析

Linear stability analysis of free surface flow

北海道大学大学院工学院　○学生員　久原愛加(Aika Hisahara)
北海道大学大学院工学研究院　正員　Adriano Coutinho de Lima
北海道大学大学院公共政策学連携研究部教授　正員　泉典洋(Norihiro Izumi)

1. はじめに

流体力学の分野において，流れの不安定性および乱流遷移に関する問題は古くから研究の対象とされており，基本流に対して加えられた摂動について線形化を行う流体力学的安定性の理論解析の方法が1960年代までは特に多く使用されてきた．また1960年代以降は微小摂動の主な非線形効果を取り入れる弱非線形理論も盛んに行われるようになっている．[2]

泉･リマ[1]による自由表面流の線形安定解析では，Navier-Stokes方程式に微小擾乱を与えて2次以上の擾乱の積を無視することで線形化し，ノーマルモードリダクションを行った方程式であるOrr-Sommerfeld方程式を自由表面流れに対応した境界条件の下で解くことで詳細な安定性ダイアグラムを示すと同時に安定性についての詳細を明らかにした．この研究では擾乱の増幅率をk-Re空間(kは波数)におけるコンタに描いた結果，底面勾配が小さくなると消失する不安定領域が現れた．これを重力による水面の復元力による影響と考え，すなわちこの領域での不安定性は水面波に関連するものと推測している．詳しくは本論文の第5章で述べることとする．

本研究では，k-Re空間の安定性ダイアグラム上に位相速度のコンタを描くとともに位相速度に関してさらに詳細な分析を行うため，自由表面流における流れの安定性について線形安定解析を行う．

2. 定式化

2.1. 支配方程式

2次元の自由表面流はNavier-Stokes方程式と連続式により次のように表すことができる．

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{t}}+\tilde{u}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}}+\tilde{v}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}}+gS+\nu\left(\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{x}^2}+\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2}\right) \tag{1}$$

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{t}}+\tilde{u}\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{x}}+\tilde{v}\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{y}}-g+\nu\left(\frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{x}^2}+\frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{y}^2}\right) \tag{2}$$

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}}+\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} = 0 \tag{3}$$

ここで$\tilde{t}$は時間，$\tilde{x}$および$\tilde{y}$はそれぞれ流れ方向および水深方向の座標，$\tilde{u}$および$\tilde{v}$はそれぞれ流速の$\tilde{x}$および$\tilde{y}$方向成分，$\tilde{p}$は圧力，νは動粘性係数，gは重力加速度，ρは水の密度，Sは底面勾配を表している．

2.2. 境界条件

本研究では表面張力の影響が無視できるスケールの自由表面流を想定し，さらに水面に働くせん断力が十分に小さいと仮定して境界条件を設定する．

まず，水面での運動学的境界条件は次式で表される．

$$\frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{t}}+\tilde{u}\frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{x}}=\tilde{v} \quad \text{at} \quad \tilde{y}=\tilde{h}(\tilde{x},\tilde{t}) \tag{4}$$

これに加え自由表面に働くせん断力が十分小さいと仮定すると，水面では接線方向および法線方向の応力がゼロとなり，次の式が成り立つ．

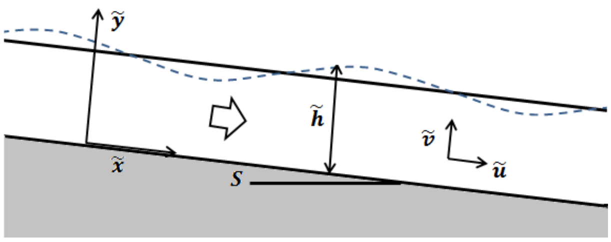

図 - 1　概略図

$$\vec{e}_{ts}\cdot\vec{\vec{T}}\cdot\vec{e}_{ns} = 0 \quad \text{at} \quad \tilde{y}=\tilde{h}(\tilde{x},\tilde{t}) \tag{5}$$

$$\vec{e}_{ns}\cdot\vec{\vec{T}}\cdot\vec{e}_{ns} = 0 \quad \text{at} \quad \tilde{y}=\tilde{h}(\tilde{x},\tilde{t}) \tag{6}$$

ここで，$\vec{e}_{ts}$および$\vec{e}_{ns}$はそれぞれ接線方向および法線方向の単位ベクトルであり，次のように表される．

$$\vec{e}_{ts} = \frac{\left(1,\frac{\partial \tilde{h}(\tilde{x},\tilde{t})}{\partial \tilde{x}}\right)}{\left[1+\left(\frac{\partial \tilde{h}(\tilde{x},\tilde{t})}{\partial \tilde{x}}\right)^2\right]^{1/2}} \tag{7}$$

$$\vec{e}_{ns} = \frac{\left(-\frac{\partial \tilde{h}(\tilde{x},\tilde{t})}{\partial \tilde{x}},1\right)}{\left[1+\left(\frac{\partial \tilde{h}(\tilde{x},\tilde{t})}{\partial \tilde{x}}\right)^2\right]^{1/2}} \tag{8}$$

また，応力テンソルは次のように表される．

$$\vec{\vec{T}} = \begin{bmatrix} -\tilde{p}+2\rho\nu\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} & \rho\nu\left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}}+\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{x}}\right) \\ \rho\nu\left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}}+\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{x}}\right) & -\tilde{p}+2\rho\nu\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} \end{bmatrix} \tag{9}$$

次に底面($\tilde{y}=0$)において，底面に対する接線方向および法線方向の流速成分はどちらもゼロとなり，以下の式が成り立つ．

$$\tilde{u} = 0 \quad \text{at} \quad \tilde{y}=0 \tag{10}$$

$$\tilde{v} = 0 \quad \text{at} \quad \tilde{y}=0 \tag{11}$$

2.3. 基本状態

ここで層流の基本状態として時間$\tilde{t}$および$\tilde{x}$方向への流の変化を無視するとき，式(1)-(3)は次のようになる．

$$gS+\nu\frac{\partial^2 \tilde{u}_0}{\partial \tilde{y}^2} = 0 \tag{12}$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial \tilde{p}_0}{\partial \tilde{y}}+g = 0 \tag{13}$$

上記の式を境界条件(4)-(6),(10)-(11)を用いて基本状態の下で解くと以下の解が得られる．

$$\tilde{u}_0(\tilde{y}) = \frac{gS\left(2\tilde{y}\tilde{h}_0-\tilde{y}^2\right)}{2\nu} \tag{14}$$

$$\tilde{p}_0(\tilde{y}) = \rho g\left(\tilde{h}_0-\tilde{y}\right) \tag{15}$$

2.4.　無次元化

ここで$\tilde{h}_0$および$\tilde{u}_a$をそれぞれ基準等流状態における水深および平均流速とすると，$\tilde{u}_a$は次のように表される．

$$\tilde{u}_a = \frac{1}{\tilde{h}_0}\int_0^{\tilde{h}_0}\tilde{u}_0 d\tilde{y} = \frac{gS\tilde{h}_0^2}{3\nu} \tag{16}$$

次の式を用いて無次元化を行う．ここで$\tilde{h}$は水深を表す．

$$\begin{aligned}(\tilde{u},\tilde{v}) &= \tilde{u}_a(u,v), &(17)\\ (\tilde{x},\tilde{y},\tilde{h}) &= \tilde{h}_0(x,y,h), &(18)\\ \tilde{t} &= \frac{\tilde{h}_0}{\tilde{u}_a}t, &(19)\\ \tilde{p} &= \rho\tilde{u}_a^2 p. &(20)\end{aligned}$$

以上の式により無次元化されたNavier-stokes方程式と連続式は次のように表される．

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{3}{R}+\frac{1}{R}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \tag{21}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y}-\frac{3}{SR}+\frac{1}{R}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) \tag{22}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{23}$$

ここでRはReynolds数を表す．

$$R = \frac{\tilde{u}_a\tilde{h}_0}{\nu} \tag{24}$$

2.5.　流関数の導入

次のように定義される流関数ψを導入する．

$$(u,v)=\left(\frac{\partial\psi}{\partial y},-\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) \tag{25}$$

Navier-Stokes方程式は以下のように表され，これらの式は流関数の導入により連続式を満たしている．

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2\psi}{\partial y\partial t}-\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}\\ &=-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{1}{R}\left(3+\frac{\partial^3\psi}{\partial x^2\partial y}+\frac{\partial^3\psi}{\partial y^3}\right)\end{aligned} \tag{26}$$

$$\begin{aligned}&-\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial t}+\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}-\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\\ &=-\frac{\partial p}{\partial y}-\frac{1}{R}\left(\frac{3}{S}+\frac{\partial^3\psi}{\partial x^3}+\frac{\partial^3\psi}{\partial x\partial y^2}\right)\end{aligned} \tag{27}$$

上記2式より圧力項を消去すると次の式が得られる．

$$\frac{\partial\nabla^2\psi}{\partial t}-\frac{\partial\psi}{\partial x}\cdot\frac{\partial\nabla^2}{\partial y}+\frac{\partial\psi}{\partial y}\cdot\frac{\partial\nabla^2}{\partial x}-\frac{1}{R}\nabla^2\nabla^2\psi=0 \tag{28}$$

ここで∇^2はラプラシアンであり，次のように表される．

$$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2} \tag{29}$$

3.　漸近展開

基本流に対して流れ方向の擾乱を導入すると，流関数ψ，圧力pおよび水深hは次のように漸近展開することができる．

$$\begin{aligned}\psi(x,y,t) &= \psi_0(y)+A\psi_1(y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)} &(30)\\ p(x,y,t) &= p_0(y)+Ap_1(y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)} &(31)\\ h(x,t) &= 1+Ah_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)} &(32)\end{aligned}$$

ここでA，kおよびωはそれぞれ擾乱の振幅，波数および角周波数である．時間モードの線形安定解析においては角周波数ωを複素数と仮定する．また，振幅Aが微小であるとき線形安定解析ではA^2の項を無視する．

3.1.　$O(1)$

上記の式を式(26)-(27)に適用してAについて整理すると$O(1)$において次の式が得られる．

$$\begin{aligned}3+\frac{\partial^3\psi_0(y)}{\partial y^3} &= 0 &(33)\\ \frac{3}{RS}+\frac{\partial p_0(y)}{\partial y} &= 0 &(34)\end{aligned}$$

これらを境界条件の下で解くと次のような解が得られる．

$$\begin{aligned}p_0(y) &= -\frac{3}{RS}(y-1) &(35)\\ \psi_0(y) &= \frac{1}{2}\left(3y^2-y^3\right) &(36)\end{aligned}$$

3.2.　$O(A)$

$O(A)$において，式(26)-(28)から次の式が得られる．

$$-\mathrm{i}\omega\psi_1'+\mathrm{i}k\psi_0'\psi_1'-\mathrm{i}k\psi_1\psi_0''=-\mathrm{i}kp_1+\frac{1}{R}\left(-k^2\psi_1'+\psi_1^{(3)}\right) \tag{37}$$

$$-k\omega\psi_1+k^2\psi_1\psi_0'=-p_1'-\frac{1}{R}\left(-\mathrm{i}k^3\psi_1(y)+\mathrm{i}k\psi_1''\right) \tag{38}$$

$$\begin{aligned}&-\frac{{\psi_1}^{(4)}}{R}+\left(\frac{2k^2}{R}+ik\psi_0'-i\omega\right)\psi_1''\\ &+\left(-\frac{k^4}{R}-ik^3\psi_0'+ik^2\omega-ik{\psi_0}^{(3)}\right)\psi_1=0\end{aligned} \tag{39}$$

同様に，境界条件については以下のようになる．

$$-\mathrm{i}\omega h_1+\mathrm{i}k\psi_1(1)+\mathrm{i}kh_1\psi_0'(1)=0 \tag{40}$$

$$k^2\psi_1(1)+\psi_1''(1)+h_1\psi_0^{(3)}(1)=0 \tag{41}$$

$$-p_1(1)-h_1p_0'(1)-\frac{1}{R}\left(2\mathrm{i}k\psi_1'(1)-2\mathrm{i}kh_1\psi_0''(1)\right)=0 \tag{42}$$

$$\psi_1'(0)=0 \tag{43}$$

$$-\mathrm{i}k\psi_1(0)=0 \tag{44}$$

4.　線形安定解析

4.1.　チェビシェブ多項式

ここからは$O(A)$を数値的に解くため，Chebyshev多項式を用いてスペクトル法を導入する．

流関数の摂動量ψ_1をChebyshev多項式T_nで次のように展開する．

$$\psi_1(y)=\sum_{n=0}^{N}a_nT_n\left(2y-1\right) \tag{45}$$

ここで，a_n $(n=0,1,...,N)$はChebyshev多項式の各項の係数を表す未知数である．また，これ以降$T_{an}(y)=T_n(2y-1)$と置き換えることとする．

式(39)において次式で表されるGauss-Lobatto点で評価すると式(47)で表される線形代数方程式が得られる．

$$y_j=\frac{\cos\left(j\pi/N\right)+1}{2} \tag{46}$$

$$\begin{bmatrix} \mathcal{A}_{0,0} & \cdots & \mathcal{A}_{0,N} & 0 \\ \mathcal{A}_{1,0} & \cdots & \mathcal{A}_{1,N} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathcal{A}_{N-1,0} & \cdots & \mathcal{A}_{N-1,N} & 0 \\ \mathcal{A}_{N,0} & \cdots & \mathcal{A}_{N,N} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{N-1} \\ a_N \\ h_1 \end{bmatrix} = 0 \qquad (47)$$

$$\mathcal{A}_{j,n} = -\frac{1}{R}T_{an}^{(4)}(y_j) + \left(\frac{2k^2}{R} + \mathrm{i}k\psi_0'(y_j) - \mathrm{i}\omega\right)T''_{an}(y_j) + \left(-\frac{k^4}{R} - \mathrm{i}k^3\psi_0'(y_j) + \mathrm{i}k^2\omega - \mathrm{i}k\psi_0^{(3)}(y_j)\right)T_{an}(y_j) \qquad (48)$$

また，式(37)により$p_1(1)$を消去した境界条件については次のようになる．

$$k\sum_{n=0}^{N} a_n T_{an}(1) + \left[-\omega + k\psi_0'(1)\right] h_1 = 0 \qquad (49)$$

$$\sum_{n=0}^{N} a_n \mathcal{B}_n + \psi_0^{(3)}(1) h_1 = 0 \qquad (50)$$

$$\sum_{n=0}^{N} a_n \mathcal{C}_n + \left[\frac{2}{R}\mathrm{i}k\psi_0''(1) - p_0'(1)\right] h_1 = 0 \qquad (51)$$

$$\sum_{n=0}^{N} a_n T'_{an}(0) = 0 \qquad (52)$$

$$\sum_{n=0}^{N} a_n T_{an}(0) = 0 \qquad (53)$$

ここで，$\mathcal{B}_n$および$\mathcal{C}_n$は次のように定義される．

$$\mathcal{B}_n = k^2 T_{an}(1) + T''_{an}(1) \qquad (54)$$

$$\mathcal{C}_n = -\psi_0''(1)T_{an}(1) - \frac{3\mathrm{i}k^2 - kR\psi_0'(1) + R\omega}{kR}T'_{an}(1) + \frac{\mathrm{i}}{kR}T_{an}^{(3)}(1) \qquad (55)$$

よって式(49)-(53)は次の線形代数方程式の形に書き換えることができる．

$$\begin{bmatrix} kT_{a0}(1) & \cdots & kT_{aN}(1) & -\omega + k\psi_0'(1) \\ \mathcal{B}_0 & \cdots & \mathcal{B}_N & \psi_0^{(3)}(1) \\ \mathcal{C}_0 & \cdots & \mathcal{C}_N & \frac{2}{R}\mathrm{i}k\psi_0''(1) - p_0'(1) \\ T'_{a0}(0) & \cdots & T'_{aN}(0) & 0 \\ T_{a0}(0) & \cdots & T_{aN}(0) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{N-2} \\ a_{N-1} \\ a_N \\ h_1 \end{bmatrix} = 0 \qquad (56)$$

式(47)の最初と最後の二行はそれぞれ水面および底面近くで評価されているので，これらの代わりに境界条件(56)を用いた次の線形代数方程式を考える．

$$\begin{bmatrix} \mathcal{A}_{2,0} & \cdots & \mathcal{A}_{2,N} & 0 \\ \mathcal{A}_{3,0} & \cdots & \mathcal{A}_{3,N} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathcal{A}_{N-3,0} & \cdots & \mathcal{A}_{N-3,N} & 0 \\ \mathcal{A}_{N-2,0} & \cdots & \mathcal{A}_{N-2,N} & 0 \\ kT_{a0}(1) & \cdots & kT_{aN}(1) & -\omega + k\psi_0'(1) \\ \mathcal{B}_0 & \cdots & \mathcal{B}_N & \psi_0^{(3)}(1) \\ \mathcal{C}_0 & \cdots & \mathcal{C}_N & \frac{2}{R}\mathrm{i}k\psi_0''(1) - p_0'(1) \\ T'_{a0}(0) & \cdots & T'_{aN}(0) & 0 \\ T_{a0}(0) & \cdots & T_{aN}(0) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{N-1} \\ a_N \\ h_1 \end{bmatrix} = 0 \qquad (57)$$

上記の式の正方行列を$\mathcal{M}$，列ベクトルを$\vec{a}$とすると次のように書き換えられる．

$$\mathcal{M}\vec{a} = 0 \qquad (58)$$

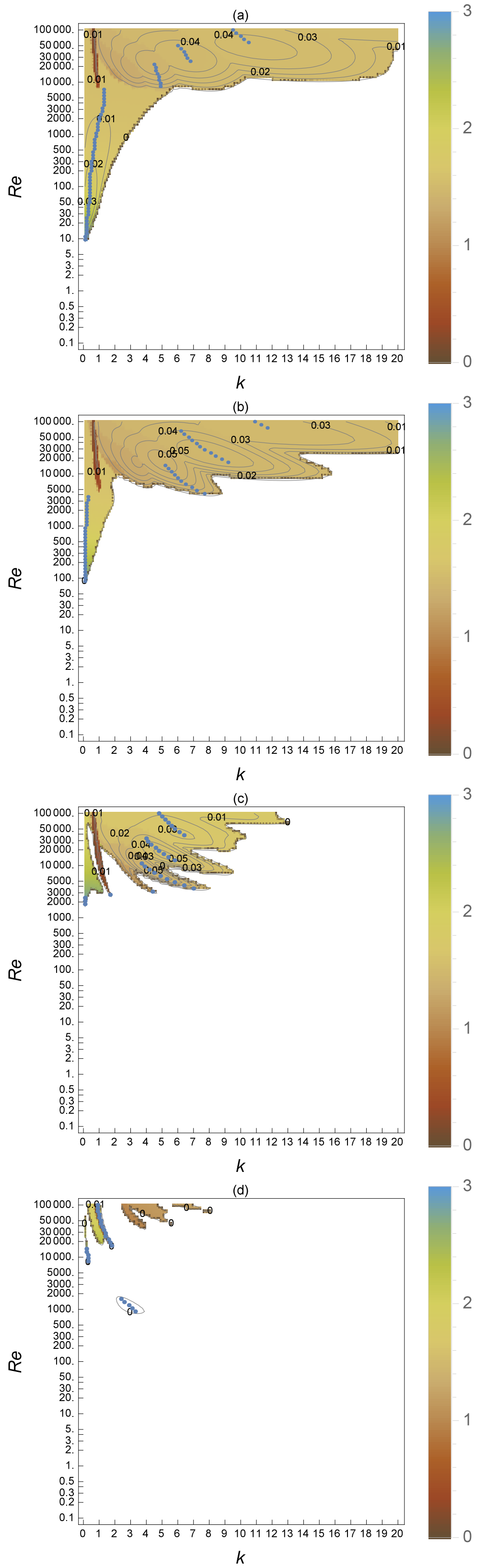

図 - 2　k-Re空間における摂動の増幅率および位相速度

5.　結果と考察

5.1.　安定性ダイアグラム

複素角周波数ωの虚部Im[ω]は擾乱の増幅率を表している．解析により得られた解よりk-Re空間におけるコンタを図-2に線で表した．(a)および(b)，(c)，(d)はそれぞれS=0.1および0.01，0.001，0.0001の場合を示しており，コンタ上の

数字が増幅率Im[ω]の値である．また，ここでは正の増幅率のみが不安定領域としてコンタ上に描かれている．この結果は泉・リマ[1]によるものと一致しており，S=0.1および0.01における結果を見ると，波数kが極めて小さいRe軸付近に存在する不安定領域では増幅率が小さく，波数が大きい領域に存在する不安定領域では比較的大きい増幅率が見られる．また，Reynolds数に対して増幅率Im[ω]が最大となるkの値を図-2のコンタ上にプロットした．これにより，複雑な不安定領域がいくつかの不安定モードの重なりによって成り立っている様子がわかる．

底面勾配が小さくなると流れに対する重力の影響により水面の復元力が大きくなるため安定となることから泉・リマ[1]は，底面勾配が小さい場合に不安定領域が消失している領域は水面波の発生に対応していると推測している．

5.2.　位相速度

泉・リマ[1]は位相速度についての分析も行っており，臨界Reynolds数付近における無次元位相速度の値が1000程度と非常に大きな値が現れている．今回求めた無次元位相速度のコンタは図-2に色度図で表した．この結果を見ると臨界Reynolds数付近でも3程度となっている．今回の解析では平均流速によって無次元化を行ったので，臨界Reynolds数付近での位相速度は平均流速の3倍程度であると考えることができる．

また，今回はさらに図-2に示した増幅率が最大となる点の複素角周波数の実部$Re[\omega]$を使用して位相速度を求めC_p-Re図を作成し，擾乱の増幅率Im[ω]のk-Re空間におけるコンタ上に合成した．(図-3) (a)および(b)，(c)，(d)はそれぞれS=0.1および0.01，0.001，0.0001の場合を示している．この図から，波数が大きい領域に存在する比較的増幅率の大きい不安定領域ではReynolds数の変化に対して位相速度が変化せず殆ど一定であることがわかる．一方で波数が小さい領域に存在する増幅率の比較的小さい不安定領域ではReynolds数が小さくなるにしたがって位相速度は徐々に増加していき，臨界Reynolds数付近で大きく増加していることがわかる．

6.　結論

自由表面流の線形安定性解析を行うことで，k-Re空間における擾乱の増幅率Im[ω]および位相速度を表すダイアグラムを得た．また，Reynolds数に対して最大の増幅率を持つ条件での位相速度の分析も行い，波数が小さい領域に存在する摂動の増幅率の比較的小さい不安定領域と，波数が大きい領域にあり摂動の増幅率が比較的大きい不安定領域の二つの領域においてReynolds数に対する位相速度の変化に違いがあることがわかった．

参考文献

1) 泉 典洋, デ リマ アドリアーノ コーティニョ:自由表面流の安定性再考 ,土木学会論文集A2(応用力学), Vol. 70, No. 2 , pp.I_801-I_806, 2014.

2) 神部 勉, P.G.ドレイジン:流体力学 安定性と乱流 第1章 流体力学的安定性.

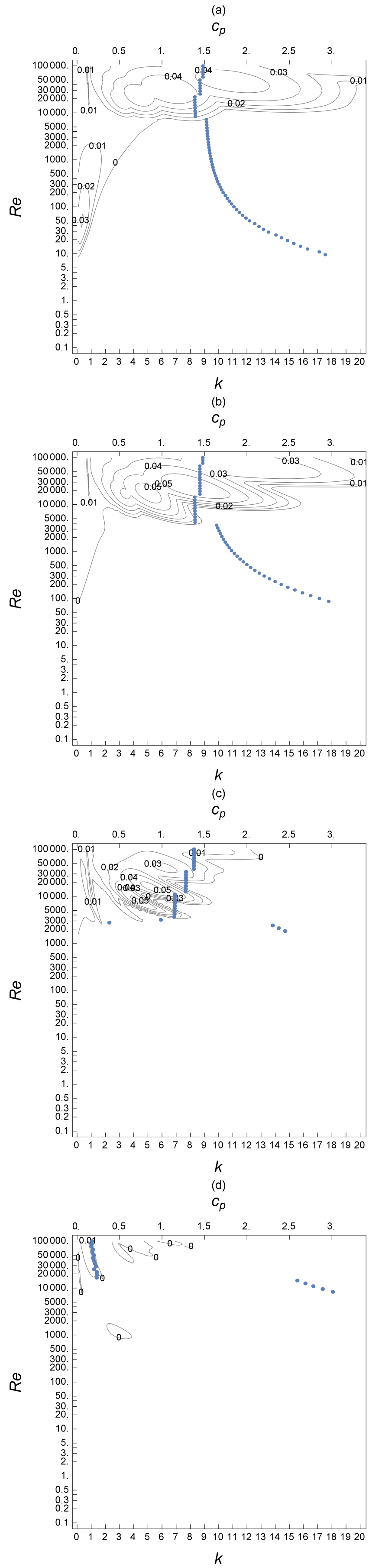

図 - 3　k-Re空間における摂動の増幅率Im[ω]およびReynolds数に対して最大の増幅率におけるRe-C_p図