

密集した沈水植物を有する流れの安定性

Stability of Flow with Dense Submerged Vegetation

北海道大学工学院環境フィールド工学専攻 ○学生会員 吉村 知祐(Tomohiro Yoshimura)
 北海道大学大学院工学研究院 正会員 デリマ アドリアノ コウチニョ
 (Adriano Coutinho de LIMA)

1. はじめに

沈水植物は水生生物の住処となる役割や、河床の流体による掘削を防ぐ役割など、その存在は河川環境を守るために重要である。一方、沈水植物が流れの抵抗として働くことで、流体の流れに擾乱を発生させ、その擾乱により幼生や植物自身の花粉が流される。このように沈水植物は河川環境や河川内の流体力学に密接な関係があるといえる。そこで、沈水植物が与える流体への影響を考え流体の挙動を明らかにすることが河川環境を保全することに関連すると考えられる。

さらに、植物が密集している場合、2つの異なるスケールの擾乱が発生し、沈水植物と流体との間でスケールをまたいだ相互作用が存在すること、またそれぞれのスケールは違う形成プロセスであるということが明らかにされている(Heidi M. Nepf^[2])。しかし、それら2つのスケールの擾乱のメカニズムが得られる分布モデルは未だに作成されていない。そこで、本研究では、仮定混合距離モデルを用いることにより渦動粘性係数を変数として導出する。さらに各パラメータに擾乱項を与え線形安定解析を用いることで各スケールの擾乱の特徴を表す分布モデルを作成し、各スケールの擾乱のメカニズムを解明することを目的としている。ここで、本研究では、沈水植物の存在による流れへの影響のみを考慮するために、植物が流れにより変形しないものとして仮定している。

2. 定式化

支配方程式として、開水路内の乱流を表すためにレイノルズ平均を取った Navier-Stokes 式を用いる。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + 1 - D_x \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} - \frac{1}{S} \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (3)$$

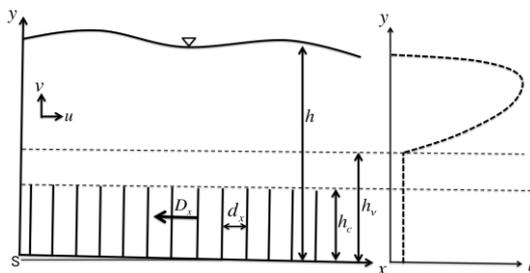


図-1 水路内の概念図と混合距離の分布

ここで、支配方程式内で現れるパラメータは図-1 で表されるように、 x および y はそれぞれ流下方向および水深方向の座標、 u および v はそれぞれ x および y 方向の流速、 t は時間、 ρ は流体の密度、 p は圧力、 S は河床勾配を表す。また、 D_x は沈水植物による抗力であり下式で表される。

$$D_x = \begin{cases} \frac{C_d a}{2(1-V_\phi)} |u|u = \frac{1}{\phi^2} |u|u & 0 \leq y \leq h_c \\ 0 & h_c \leq y \leq h \end{cases} \quad (4)$$

ここで、 h_c は植生の高さであり、抗力は植生によるものであるために h_c が境界となる。また、 C_d は植生の抗力係数、 a は単位植生体積当たりの正面面積、 V_ϕ は植生の体積比を表す。解析結果から、抗力は河床流速 ϕ の2乗の逆数が係数となることが示される。

さらに、支配方程式中の $\tau_{ij}(x, y)$ はレイノルズ応力を表し、以下の式で示される。

$$\tau_{xx} = 2\rho\nu_T \frac{\partial u}{\partial x}, \tau_{xy} = \rho\nu_T \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \tau_{yy} = 2\rho\nu_T \frac{\partial v}{\partial y} \quad (5.6.7)$$

ここで、 ν_T は渦動粘性係数を表す。また、乱流中の小部分の流体が周囲と同じ状態になるまでの距離を仮定する混合距離モデルを用いることにより渦動粘性係数を変数として以下の式で表すことができる。

$$\nu_T = l^2 \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \quad (8)$$

$$l = \begin{cases} \kappa d_x & 0 \leq y \leq h_v \\ \kappa(y - h_c) \sqrt{\frac{h - y}{h - h_c}} & h_v \leq y \leq h \end{cases} \quad (9)$$

ここで、 l は混合距離を表し、下層と上層の混合距離の値が一致する高さを h_v とする。また、 κ はカルマン定数(=0.4)、 d_x は隣り合う植生間の平均距離を表す。

3. 境界条件・整合条件

3. 1. 自由水面($y = h$)

境界上の粒子は微小時間後も常に同一境界上にある(運動学的境界条件)。

$$\frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} = v \quad (10)$$

自由水面に対して法線、接線方向の応力はゼロになる(動的境界条件)。

$$\tilde{e}_{ns} \cdot T \cdot \tilde{e}_{ns} = 0, \tilde{e}_{ts} \cdot T \cdot \tilde{e}_{ns} = 0 \quad (11,12)$$

ここで、 \tilde{e}_{ns} 、 \tilde{e}_{ts} はそれぞれ水面に対して法線、接線方向の単位ベクトルであり以下の式で表される。

$$\tilde{e}_{ns} = \frac{1}{\sqrt{1+(\frac{\partial h}{\partial x})^2}} \left(-\frac{\partial h}{\partial x}, 1 \right) \quad (13)$$

$$\tilde{e}_{ts} = \frac{1}{\sqrt{1+(\frac{\partial h}{\partial x})^2}} \left(1, \frac{\partial h}{\partial x} \right) \quad (14)$$

また、 T は応力テンソルであり以下の式で表される。

$$T = \begin{bmatrix} -p + \tau_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & -p + \tau_{yy} \end{bmatrix} \quad (15)$$

3. 2. 河床($y = 0$)

河床付近で鉛直方向の流速はゼロであり、さらに流下方向の流速は一定であるとみなす。

$$v = 0 \quad (16)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad (17)$$

3. 3. 整合条件

植生による抗力の影響により、植生領域中($0 \leq y \leq h_c$)、植生領域外($h_c \leq y \leq h$)で異なった流速分布が示されることが明らかになっている (Heidi M. Nepf^[1]) が、それぞれの領域の境界面において、流速、圧力、剪断応力は連続する。そこで本研究では、植生による抗力、混合距離が変化する境界面においても流速、圧力、剪断応力が連続することを整合条件として以下のように示す。

$$\lim_{y \rightarrow +h_c} (u, v, p, \tau_{xx}, \tau_{xy}, \tau_{yy}) = \lim_{y \rightarrow -h_c} (u, v, p, \tau_{xx}, \tau_{xy}, \tau_{yy}) \quad (18)$$

$$\lim_{y \rightarrow +h_v} (u, v, p, \tau_{xx}, \tau_{xy}, \tau_{yy}) = \lim_{y \rightarrow -h_v} (u, v, p, \tau_{xx}, \tau_{xy}, \tau_{yy}) \quad (19)$$

5. 無次元化

支配方程式、境界条件、整合条件の各パラメータは以下の式により既に無次元化が行われている。

$$(\tilde{u}, \tilde{v}) = \tilde{u}_f(u, v) \quad (20)$$

$$(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{h}, \tilde{h}_c, \tilde{h}_v, \tilde{l}, \tilde{d}_x) = \tilde{h}_0(x, y, h, h_c, h_v, l, d_x) \quad (21)$$

$$\tilde{t} = \frac{\tilde{h}_0}{\tilde{u}_f} t, \quad \tilde{v}_T = \tilde{u}_f \tilde{h}_0 v_T \quad (22,23)$$

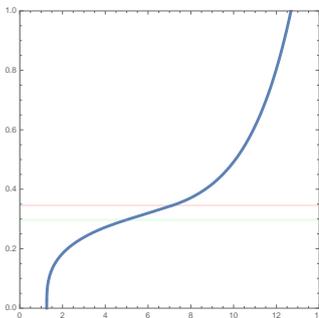


図-2 基本状態における流速分布

$$S = 1.0 \times 10^{-5}, \quad d_x = 0.046861395,$$

$$h_c = 0.295503212 \text{ (緑線)}, \quad \phi = 1,261452263,$$

$$h_v = 0.344068 \text{ (赤線)}$$

$$(\tilde{p}, \tilde{\tau}_{ij}) = \rho \tilde{u}_f^2 \quad (24)$$

文字上部の \sim は有次元であることを示す。 \tilde{u}_f または \tilde{h}_0 はそれぞれ基本状態における摩擦速度($=\sqrt{gS\tilde{h}_0}$)または水深を表す。

5. 流関数

流関数を導入することで連続式が常に満たされるとみなすことができる。流関数は以下のように表すことができる。

$$(u, v) = \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}, -\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \quad (25)$$

5. 基本解

基本状態では、各変数を次のように表すことができる。

$$(u, v, \psi, h, p, \tau_{xx}, \tau_{xy}, \tau_{yy}, D_x) = (u_0, 0, \psi_0, 1, p_0, 0, \tau_{xy0}, 0, D_{x0}) \quad (25)$$

植生による大きな擾乱が要素として含まれていない状態であり、基本解は小さなスケールの擾乱のみを要素として含む解となる。

式(25)により支配方程式、境界条件、整合条件はそれぞれ次のように単純化される。

$$1 + \frac{d\tau_{xy0}}{dy} - D_{x0} = 0 \quad (26)$$

$$-\frac{dp_0}{dy} - \frac{1}{S} = 0 \quad (27)$$

$$\tau_{xy0} = 0 \quad (y = 1) \quad (28)$$

$$p_0 = 0 \quad (y = 1) \quad (29)$$

$$\frac{du_0}{dy} = 0 \quad (y = 0) \quad (30)$$

$$\lim_{y \rightarrow +h_c} (u_0, p_0, \tau_{xy0}) = \lim_{y \rightarrow -h_c} (u_0, p_0, \tau_{xy0}) \quad (31)$$

$$\lim_{y \rightarrow +h_v} (u_0, p_0, \tau_{xy0}) = \lim_{y \rightarrow -h_v} (u_0, p_0, \tau_{xy0}) \quad (32)$$

式(26)~(32)を解くことにより基本状態における流速分布を導出することができる(図-2)。初期条件として以下の値を代入する(M. Ghisalberti ら^[3])。

$$S = 1.0 \times 10^{-5}, \quad d_x = 0.046861395$$

$$h_c = 0.295503212, \quad \phi = 1,261452263$$

計算により、上下層の混合距離の値が一致する高さは $h_v = 0.344068$ となる。植生領域外では下面に植生の抗力が働いていることにより流速が大きく減少する。植生領域内では河床に近づくにつれて流速の変化量が小さくなり、河床付近では流速が一定になる。また、植生の上端では流速分布に変曲点が現れる。さらに、植生の上端付近で最も流速の変化量が大きくなることから、この領域中に渦動粘性係数、せん断応力の最大値が現れる。よって、植生上端付近で最も流れの乱れが生じることが分かる。

6. 線形安定解析

水路を水深により3つの領域に区分する。

領域 a: 植生域上で混合距離が水深に依存する。

$$(h_v \leq y \leq h)$$

領域 b : 植生域上で混合距離が一定である.

$$(h_c \leq y \leq h_v)$$

領域 c : 植生域内. $(0 \leq y \leq h_c)$

ここで, 領域 a および b, c 内の流関数をそれぞれ ψ_a, ψ_b, ψ_c と表す.

6. 1. 摂動展開

基本解に対し摂動項を与えると各変数は下式によって示される.

$$\begin{pmatrix} \psi_a \\ \psi_b \\ \psi_c \\ p \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_{a0} \\ \psi_{b0} \\ \psi_{c0} \\ p_0 \\ 1 \end{pmatrix} + A \begin{pmatrix} \psi_{a1} \\ \psi_{b1} \\ \psi_{c1} \\ p_1 \\ h_1 \end{pmatrix} e^{i(kx - \omega t)} \quad (33)$$

ここで, A は擾乱の振幅, k は波数, ω は $\omega = \omega_r + i\Omega$ で表され, ω_r は振動数, Ω は増幅率を表す.

6. 2. 摂動解

摂動展開によって得られる摂動方程式は解析的に解くことができない. そこで数値解法として, Chebyshev 多項式展開を適用しスペクトル法を用いることで境界条件, 整合条件の下で支配方程式を解く. Chebyshev 多項式展開を用いて流関数を次のように表す.

$$\psi_{a1} = \sum_{n=0}^N a_n T_{an}(\zeta) \quad (34)$$

$$\psi_{b1} = \sum_{n=0}^N b_n T_{bn}(\eta) \quad (35)$$

$$\psi_{c1} = \sum_{n=0}^N c_n T_{cn}(\xi) \quad (36)$$

ここで, $T_{an}(\xi)$ および $T_{bn}(\eta)$, $T_{cn}(\xi)$ はそれぞれ n 次の Chebyshev 多項式であり, a_n および $b_n, c_n (n = 0, 1, \dots, N)$ はそれらの係数である. ζ および η, ξ はそれぞれ Chebyshev 多項式の独立変数であり, その領域は $-1 \leq \zeta, \eta, \xi \leq 1$ である. これらの変数を水路中の水深の領域と一致させるために次の変数変換を用いている.

$$\zeta = \frac{2(y - h_v)}{1 - h_v} - 1 \quad (37)$$

$$\eta = \frac{2(y - h_c)}{h_v - h_c} - 1 \quad (38)$$

$$\xi = \frac{2y}{h_c} - 1 \quad (39)$$

これらの変数を支配方程式に代入した後, 次に示される Gauss-Lobatto 点において式を評価する.

$$\zeta_n = (1 - h_v) \frac{\cos(n\pi/N) + 1}{2} + h_v \quad (40)$$

$$\eta_n = (h_v - h_c) \frac{\cos(n\pi/N) + 1}{2} + h_c \quad (41)$$

$$\xi_n = h_c \frac{\cos(n\pi/N) + 1}{2} \quad (42)$$

導出された式を境界条件, 整合条件と合わせ, 全ての領

域の計算結果を結合することにより線形方程式系が導出される. その後, 代数操作により擾乱の増幅率 Ω は次のような関数形で求められる.

$$\Omega = f(k, d_x, \phi, h_c, S) \quad (43)$$

7. 解析結果・考察

7. 1. 解析結果

基本解導出時と同様の初期条件 (Case1: $d_x = 0.046861395, \phi = 1.261452263$) と, それに比べ植生が密集した条件 (Case2: $d_x = 0.0468, \phi = 1.26$) における波数 k と増幅率 Ω , 波の位相速度 $C_p (= \omega_r/k)$ の関係を図-3, 4 で示す. ただし, 本論文では, 河床速度 ϕ と植生間の距離 d_x が独立しているものと仮定している.

波数に関する増幅率の分布(図-3)には2種類の曲線が存在

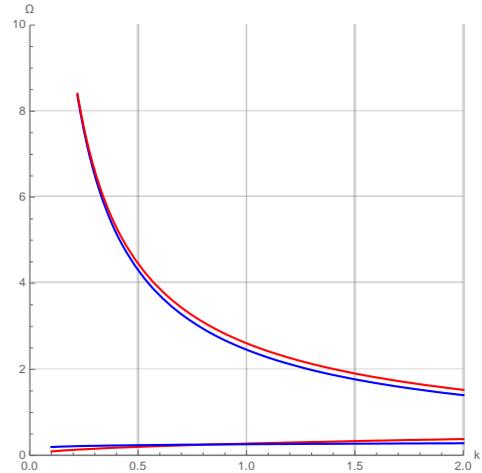


図-3 波数 k に対する擾乱の増幅率 Ω の分布
Case1: $d_x = 0.046861395, \phi = 1.261452263$
(赤線)

Case2: $d_x = 0.0468, \phi = 1.26$ (青線)

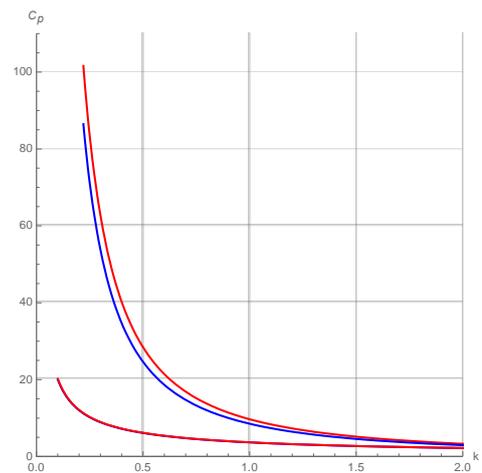


図-4 波数 k に対する波の位相速度 $C_p = \omega_r/k$ の分布

Case1: $d_x = 0.046861395, \phi = 1.261452263$
(赤線)

Case2: $d_x = 0.0468, \phi = 1.26$ (青線)

在している。1 つは波数が小さい時に増幅率が最大になり、波数が増加するにつれて増幅率が減少している。そしてもう一方は、波数が小さい時に増幅率が最小になり、波数が増加するにつれて増幅率が少しずつ増加している。これら2種類の分布により沈水植物を有する流れには2種類の擾乱が発生していると推測できる。前者の分布を示す擾乱を mode1, 後者を mode2 と呼ぶ。

さらに、Case1 と Case2 における擾乱の増幅率を比較すると、mode1 においては波数が小さい領域では変化はないが波数が 0.5 付近から変化が現れ、沈水植物が密集することで増幅率が減少している。一方で、mode2 においてはほとんど変化がない。この結果からも mode1 は植生密度に関連した擾乱であることから植生領域付近で発生し、mode2 は植生による影響に関連しない水面付近の擾乱であるということが考えられる。

また、波数に関する波の位相速度の分布(図-4)においても2種類の曲線が存在している。これらの2種類の曲線分布は位相速度の値に大きな差がある。位相速度が比較的大きい分布は mode1, 小さい分布は mode2 に対応している。Case1 と Case2 における波の位相速度を比較すると mode1 においては沈水植物が密集することで位相速度が減少する。一方で mode2 においては全く変化がない。

7. 2. 考察

既往研究(Heidi M. Nepf^[2], Singh^[4])により沈水植物を有する流れには2種類の擾乱が存在し、その2種類の擾乱の1つは植生領域中で発生し、もう一方の擾乱は植生上端付近で発生することが明らかになっている。本研究で発見した2種類の擾乱と、既往研究が示した2種類の擾乱が同様の擾乱を示していると確定はできない。なぜなら、既往研究により発見された擾乱はどちらも沈水植物の存在による影響を受けるが、本研究で示した mode1 の擾乱は植生の密度により変化することから植生に関与していると考えられる一方で、mode2 の擾乱は植生の密度の変化による影響をほとんど受けていないからである。河床が多孔質媒体を有する開水路流れに関する既往研究(Chang^[1])によると開水路中の流れには2種類の擾乱が発生し、1 つは水面付近で発生しその波数と増幅率は非常に小さく、もう一方は河床付近で発生しその波数と増幅率は比較的大きいと示している。そこで、mode1 は河床もしくは植生上端付近で発生する擾乱であり、mode2 は水面付近で発生する擾乱であると推測できる。さらに、Case1 と Case2 における擾乱の増幅率を比較した結果により、mode1 は植生密度に関連した擾乱であることから植生領域付近で発生し、mode2 は植生による影響に関連しない水面付近の擾乱であるということが考えられる。

8. 結論

本研究での結論は以下の通りである。

- ・沈水植物を有する流れには2つの擾乱が存在する(図-3, 4)。1 つは波数が大きくなるにつれて増幅率が減少し(mode1), もう一方は波数が大きくなるにつれて増

幅率が増加する(mode2)。

- ・ mode1 は植生の密度が変化することで増幅率、位相速度共に変化が生じるが、mode2 は植生の密度により変化しない。
- ・ mode1 は沈水植物上端付近で発生し、mode2 は水面付近で発生する擾乱であるということが既往研究(Chang^[1])により推測できる。
- ・ 本研究で示した2種類の擾乱の発生領域とその性質がまだわかっていない。今後の研究で、様々な初期条件における解析データを導出し、河川環境の変化による擾乱の変化を見ることで、これら2つの擾乱の発生メカニズムを解明する必要がある。

参考文献

- [1] Chang, M., Chen, F. and Straughan, B.: Instability of Poiseuille flow in a fluid overlying a porous layer, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol.564, pp.287-303, 2006.
- [2] Heidi M. Nepf: Flow and Transport in Regions with Aquatic Vegetation, *The Annual Review of Fluid Mechanics*, 44:123-42, 2012
- [3] M. Ghisalberti and H. M. Nepf, The limited growth of vegetated shear layers, *Water Resources Research*, Vol. 40, W07502, 2004
- [4] Ravi Singh, M. M. Bandi, Amala Mahadevan and Shreyas Mandre: Linear stability analysis for monami in a submerged seagrass bed, *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 786, R1, 2015