

むだ時間の非線形貯留関数法への適用に関する研究

Study on dead time applying to non-linear storage function model

北海学園大学大学院 ○学生員 井上 進 (Susumu Inoue)
北海学園大学工学部 正 員 嵯峨 浩 (Hiroshi Saga)

1. まえがき

著者らは前報^{1),2),3)}で、遅れ現象の一つであるむだ時間を線形貯留関数法に導入する手法を示し、流出解析における効果を定量的に示した。しかし、この適用モデルは単位図法であり、実用に供するには無理がある。本研究はこの点を踏まえ、非線形貯留関数法にむだ時間を適用し、その導入効果をより実用的なモデルで検証するものである。

一方、遅れ現象を非線形貯留関数法に取り入れた手法として、日本の河川計画に多く用いられている木村の貯留関数法がある。形式上、出力を時間軸上で移動させるという点で同じであるが、概念が全く異なっている。木村の貯留関数法では、 $(S \sim Q)$ 曲線の二価性を解消するため、流出量を適当にずらし $(S \sim Q)$ 曲線が一価の曲線になったときの時間差を遅れ時間として定義している。さらに、解析後、計算流量をその時間だけ元に戻す操作が必要とされる。この一連の操作は物理的意味が曖昧とされ、今でもその根拠が明らかにされていない。本研究は、降雨一流出系におけるむだ時間の物理的意味を考察し、その特性を明らかにすることも目的としている。

2. むだ時間の特性と概念

一般の1入力1出力の応答系には遅れ現象⁴⁾が発生する。一つが「遅れ時間」であり、もう一つは「むだ時間」である。遅れ時間は図-1(a)に示すように、入力波形に対して出力波形が変形して出力する現象で、重心位置などに相違が生じる。一方、むだ時間とは図-1(b)に示すように、入力があっても出力が全くない現象である。降雨一流出系では、遅れ現象の全てが遅れ時間によって発生すると解釈され、むだ時間が考慮されることは今までほとんどなかった。しかし、自動制御系では遅れ時間がフィードバック・システムの重要な要素であると考えられており、重要な概念として扱われている。

降雨一流出系において流出解析を貯留関数法などの集中定数型モデルで行う場合、入力である降雨は「流域平均雨量」を用いており、実際の降雨分布を考慮することは不可能である。流域内における実際の降雨分布は図-2(a)に示されるように、場所によってかなりその強度が異なる。特に山地河川などは上流部が山岳地帯であることが多く、降雨の特性上、上流域で強い雨が降ることが一般的である。一方、流域平均雨量は図-2(b)に示されるように、流域全体で様に降雨があるとして取り扱われる。極端な場合、流量基準点付近では全く降雨がないにも関わらず、見かけ上の降雨が入力として存在することになる。即ち、上流域で降った雨水が河道を經由して

流量基準点に到達するまで、流量観測値は全く増加しないことになる。これが流量の計算値と観測値の立ち上がり点におけるずれの原因であり、これを改善するために計算手段である数学モデルにむだ時間を導入する理由である。このように、降雨一流出系におけるむだ時間は、降雨分布（流域平均雨量の見かけ上の降雨の存在）によって発生すると考えられ、上流域での雨水が下流端に到達するまで河道流下時間にほぼ相当する概念であると解釈することができる。

以上のことから、降雨一流出系モデルにおけるむだ時間の特性は次のように考えられる。(1)流域面積が大きいほど河道長が長くなることから、大流域ほどむだ時間が大きくなる。(2)大規模降雨ほど流域全体に雨が降ることになるので、規模が大きいほどむだ時間は小さくなり、状況によってはむだ時間がゼロになる。(3)降雨分布を考慮できる分布型流出解析モデルでは、見かけ上の降雨は存在しないので、むだ時間を考慮する必要はない。

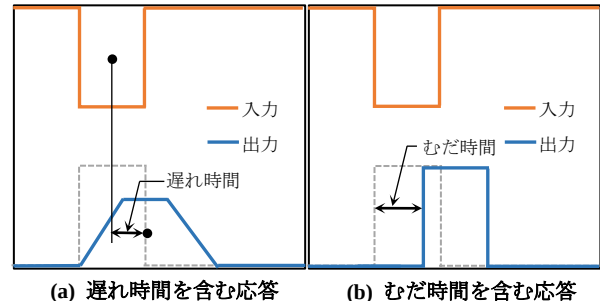


図-1 遅れ時間とむだ時間における応答の概念図

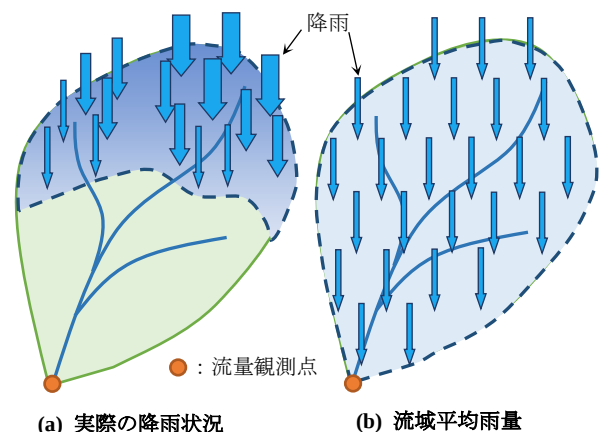


図-2 実際の降雨状況と流域平均雨量の概念図

3. 流出モデルとむだ時間の導入方法

むだ時間を組み込むモデルとして、(S~Q) 曲線が非線形かつ一価関数の貯留方程式を用いた。このモデルは非線形貯留方程式として最も基礎的であり、これに損失項を考慮すると次のような連立方程式になる。

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = r(t) - q(t) - z(t) + q_b(t) \\ S = K \cdot q^p(t) \\ z(t) = \alpha \cdot q(t) \\ q_b(t) = q_0 \cdot \exp(-\lambda t) \end{cases} \quad \dots (1)$$

ここで、 $S(t)$: 貯留高(mm)、 $z(t)$: 浸透高(mm/hr)、 K : 貯留係数、 p : 貯留指数、 α : 浸透孔係数、 $r(t)$: 観測降雨(mm/hr)、 $q(t)$: 観測流出高(mm/hr)、 $q_b(t)$: 強制入力項(mm/hr)、 q_0 : 初期流出高(mm/hr)

貯留関数法は(1)式で示される連続の式と貯留方程式を組み合わせた微分方程式を数値積分して解く。したがって、解くべき方程式は(2)式になる。

$$K \frac{d}{dt} q^p(t) + W \cdot q(t) = R \quad \dots (2)$$

ここで、 $W=1+\alpha$ 、 $R=r(t)+q_b(t)$ である。

むだ時間を貯留関数法に導入する方法は以下のように行う。本来、入力に対し直ちに出力するのがむだ時間の存在しないシステムである。むだ時間を L とすると、むだ時間は入力に対して L 時間だけ遅れて出力される。つまり、出力の時間 t にむだ時間 L を加え、 $q(t)$ を $q(t+L)$ と置き換えることでむだ時間を考慮した出力を表すことができ、むだ時間を容易に導入することができる。したがって、むだ時間を考慮した方程式は(3)式となる。

$$K \frac{d}{dt} q^p(t+L) + W \cdot q(t+L) = R \quad \dots (3)$$

ここで、 $q(t+L)$ と $q^p(t+L)$ を(4)式で示されるように Taylor 級数展開する。本研究では、(4)式の右辺第2項 (第1次微分項) まで採用した。

$$\begin{cases} q(t+L) = q(t) + L \cdot \frac{dq(t)}{dt} + \frac{L^2}{2!} \cdot \frac{d^2q(t)}{dt^2} + \dots \\ q^p(t+L) = q^p(t) + L \cdot \frac{dq^p(t)}{dt} + \frac{L^2}{2!} \cdot \frac{d^2q^p(t)}{dt^2} + \dots \end{cases} \quad \dots (4)$$

(4)式を(3)式に代入すると(5)式となり、これを解くことでむだ時間を考慮した非線形の貯留関数方程式の解が得られる。

$$K \frac{d}{dt} \left\{ q^p + L \frac{dq^p}{dt} \right\} + W \left\{ q + L \frac{dq}{dt} \right\} = R \quad \dots (5)$$

本研究では、(2)式のむだ時間を考慮しないモデルを「 L なしモデル」、(3)式のむだ時間を考慮するモデルを「 L モデル」とする。(5)式の未知パラメータは K と W および L だけであり、主要な部分の遅れを K 、むだ時間を L で表すこととなり、降雨一流出系においても入力ー出力系の遅れ現象を全て取り込んだことになる。また、(2)式、(5)式は損失項を W で取り込むので、観測データをそのまま用いることができる。

4. 未知パラメータの数学的最適化手法と誤差評価

本研究では、未知パラメータを数学的に最適化する方法として、感度係数を用いたニュートン法を用いた。目的関数は以下のように定義される。

$$\text{Min } J = \sum e^2(j) \quad , \quad j = 1, 2, 3, \dots, N \quad \dots (6)$$

ここで、

$$e(j) = \frac{q^*(j) - q(j)}{\sqrt{q^*(j)}}$$

$q^*(j)$: 観測流出高(mm/hr)、 $q(j)$: 計算流出高(mm/hr)、 N : 流量標本数

ニュートン法における $(m+1)$ ステップ時の未知パラメータは(7)式で算出され、(8)式で示される条件を満たしたとき収束とする。ただし、 ε は1%とし、繰り返し回数を 500 回とした。なお、初期値は全ての計算において同一の値である。

$$\mathbf{P}^{m+1} = \mathbf{P}^m + \Delta \mathbf{P}^m \quad \dots (7)$$

ここで、

$$\mathbf{P}^m = \begin{bmatrix} K^m \\ W^m \\ L^m \end{bmatrix}, \quad \Delta \mathbf{P}^m = \begin{bmatrix} \Delta K^m \\ \Delta W^m \\ \Delta L^m \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon \geq \left| \frac{\Delta \mathbf{P}^m}{\mathbf{P}^m} \right| \quad \dots (8)$$

数値積分法は前報^{2),3)}と同様であり、参考文献⁵⁾には感度係数の算出過程が詳述されているので参照されたい。

誤差評価式は(9)式を採用する。これは目的関数の誤差の平均を示し、 ERJ の値が小さいほど計算精度が良いことを意味する。

$$ERJ = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{\{q^*(i) - q(i)\}^2}{q^*(i)} \quad \dots (9)$$

5. むだ時間を導入した解析結果の検証

むだ時間の導入効果を検証するために、道内一級河川13水系の観測データ⁶⁾を用いて流出解析を行った。観測データは 466 例であり、そのうち計算が収束したのは 402 例である。計算結果を図-3から図-5に示す。図-3は、流域面積が異なるが総降雨量がほぼ同じで場合の計算例である。図-4は同一流域で降雨規模が異なる場合であり、図-5は異なる流域であるが同一流域面積で

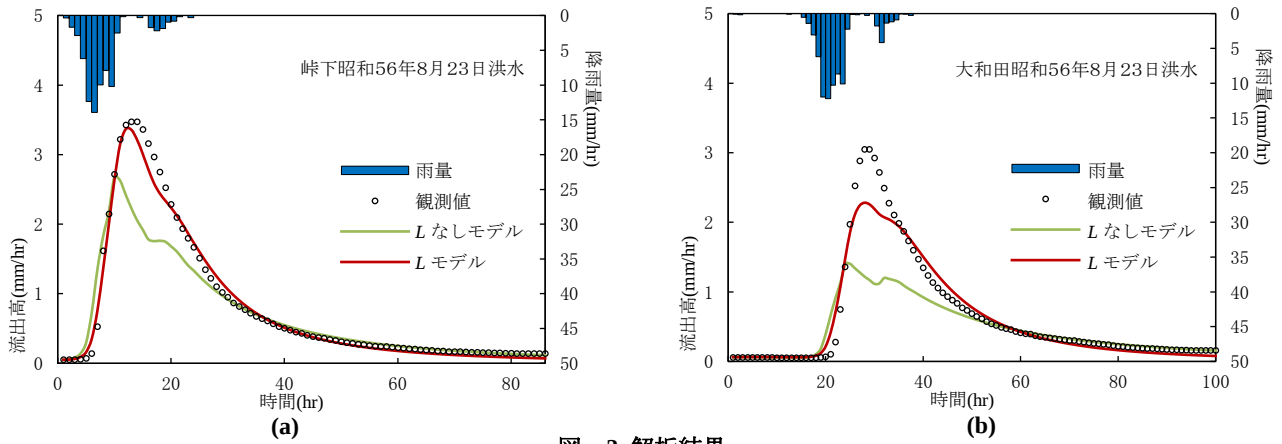


図-3 解析結果

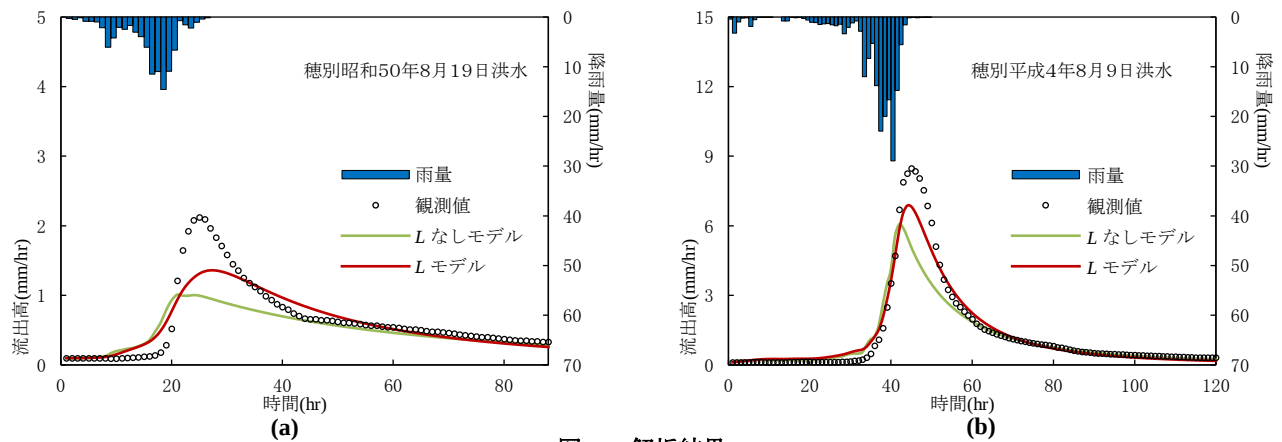


図-4 解析結果

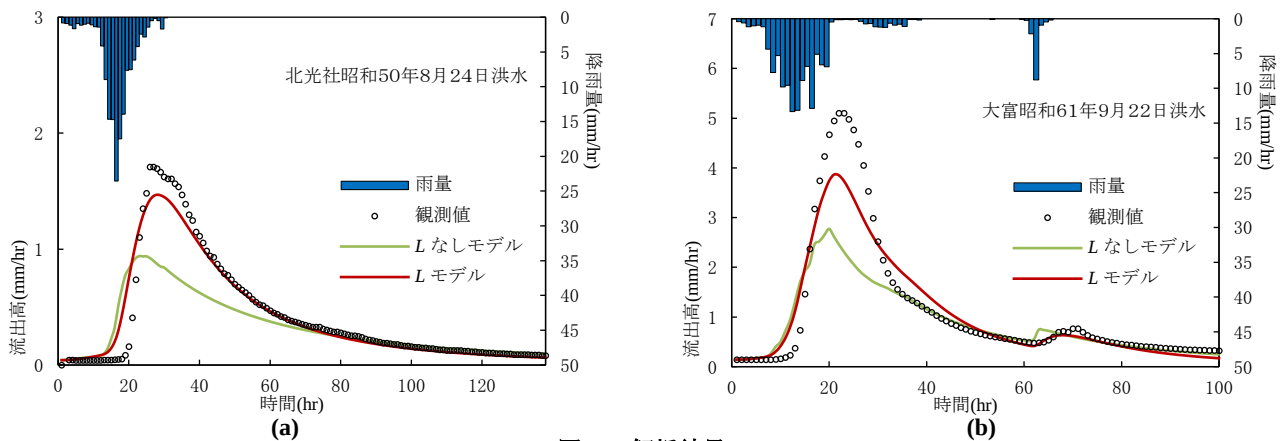


図-5 解析結果

表-1 各出水例におけるむだ時間

	解析例	洪水データ名	水系	流域面積 (km ²)	総降雨量 (mm)	むだ時間 (hr)
図-3	(a)	峠下昭和56年8月23日洪水	留萌川水系	51	76.64	3.0
	(b)	大和田昭和56年8月23日洪水	留萌川水系	234.1	77.38	5.4
図-4	(a)	穂別昭和50年8月19日洪水	鶴川水系	949.5	96.15	4.1
	(b)	穂別平成4年8月9日洪水	鶴川水系	949.5	182.18	2.8
図-5	(a)	北光社昭和50年8月24日洪水	常呂川水系	558.5	144.98	5.8
	(b)	大富昭和61年9月22日洪水	後志利別川水系	612.3	138.71	5.3

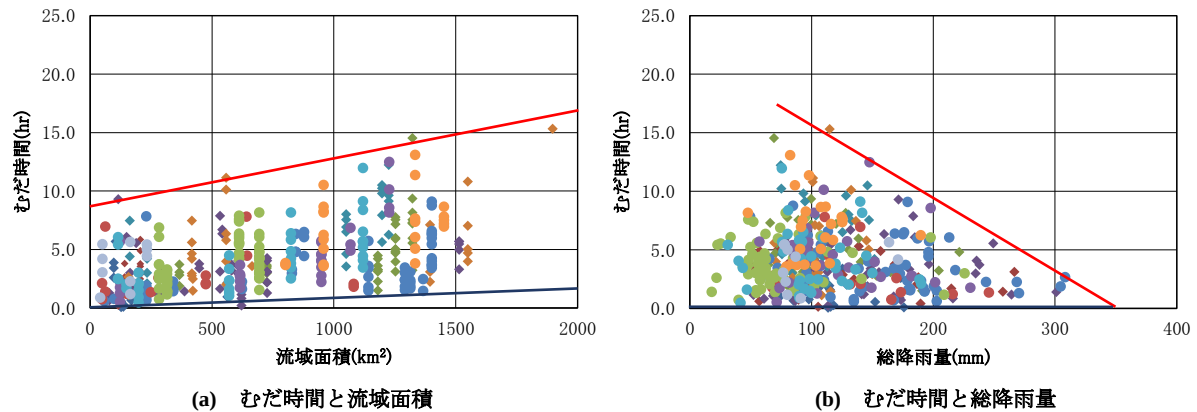


図-7 むだ時間と流域面積および総降雨量との相関関係

あり、かつ降雨規模がほぼ同じ場合である。具体的な流域面積と総降雨量は表-1に示している。

詳細に検討すると図-3は4倍の流域面積の違いがあるが、むだ時間は流域面積の大きい方が5.4時間、小さい方が3.0時間であり、流域面積の大きい方はむだ時間が大きくなっている。また、図-4では降雨規模が2倍ほどの違いであり、大きい方が2.8時間、小さい方が4.1時間で降雨規模が大きい方はむだ時間が小さくなっている。さらに、図-5は同一流域面積・降雨規模の場合であるが、それぞれ5.8時間、5.3時間でありむだ時間はほぼ同じ値となっている。このことは2.で述べたむだ時間の特性と全く一致している。

L なしモデルと L モデルの解析結果を比較すると、いずれの場合でもハイドログラフ立ち上がり点が改善され、特にピーク流量生起時刻が大幅に改善されているのがわかる。むだ時間は時間軸方向（横方向）の解析精度向上を意図したものだが、ピーク流量の値自体も改善されていることは興味深いことである。なお、 L モデルの誤差評価 ERJ の平均値は0.04で十分に小さな値であり、いずれの計算結果においてもむだ時間を導入したモデルの方がしないモデルよりも精度が向上したことを確認している。

6. 降雨一流出系におけるむだ時間の特性の検証

図-7に402例を用いてむだ時間と流域面積および総降雨量の関係を示した。図-7(a)より、流域面積が大きくなるほどむだ時間が大きく、流域面積が小さくなるほどむだ時間が小さくなっている。また、図-7(b)では総降雨量が大きくなるとむだ時間が小さく、総降雨量が小さくなるほどむだ時間が大きくなるのがわかる。この相関性は前述したむだ時間の特性と同様である。また、図-7(a)より、むだ時間と流域面積の関係にはむだ時間の上限と下限が存在しているのがわかる。さらに、図-7(b)においてもむだ時間と総降雨量には上限が存在し、下限は2.で述べた特性(2)のように降雨状況によってはむだ時間がゼロとなっているのがわかる。以上の結果より、降雨一流出系におけるむだ時間の大きさは流域面積および総降雨量と相関関係にあることがわかる。

7. 最後に

本研究では、非線形貯留関数法にむだ時間を導入する手法を構築し、実流域において導入効果の検証を道内一級河川13水系の観測データを用いて行った。その結果、むだ時間を流出解析モデルに導入にしたことにより、ハイドログラフの立ち上がり点の改善、流出高がピークとなる時刻の改善の2点を確認した。また、流域面積および総降雨量とむだ時間には相関関係があり、むだ時間の発生は降雨分布に起因し、その大小を決定する要素は流域面積と総降雨量であることを明らかにした。さらに、流域面積および総降雨量に対し、むだ時間の上限と下限が存在することを示した。

一方、分布型流出解析モデルでは降雨データをメッシュ毎に用いて解析を行うため、実際の降雨分布を考慮している。現在、地下浸透を考慮した分布型流出解析モデルであるIFAS⁷⁾を用いた解析を行っている。今後、むだ時間を考慮した非線形貯留関数法と分布型流出解析モデルであるIFASの解析結果を比較し、むだ時間の概念を実証する予定である。

参考文献

- 1) 嵯峨浩：周波数応答法による流出解析、土木学会論文集、No.393/II-9、pp.77-86、1988-5。
- 2) 中村、阿部、柳屋、嵯峨：むだ時間の概念を導入した流出解析手法に関する研究、北海道支部論文報告集第70号、B-51、2014-2。
- 3) 森、白岩、柳屋、嵯峨：むだ時間の概念を流出解析に導入した場合の効果に関する研究、北海道支部論文報告集第71号、B-16、2015-2
- 4) 高橋利衛：自動制御の数学、オーム社、1961
- 5) 北海道開発局開発土木研究所、若手水文学研究会：現場のための水文学、1994
- 6) 嵯峨浩：道内一級河川13水系の洪水データ集、北海学園大学、2001
- 7) 杉浦、深見、他：衛星雨量情報を利用した洪水予測システム(IFAS)の開発、河川技術論文集、pp-53-58、2008-6