

# 異方性積層板の曲げ解析における面外応力の改良

Improvement of out-of-plane stresses in bending analysis of anisotropic laminated plates

函館工業高等専門学校 正員 渡辺 力 (Chikara WATANABE)  
 函館工業高等専門学校 学生会員 長内亮賀 (Ryouga OSANAI)  
 函館工業高等専門学校 学生会員 金澤雄大 (Yudai KANAZAWAI)  
 函館工業高等専門学校 学生会員 米谷悠敬 (Yutaka YONEYA)

## 1. まえがき

近年、繊維強化プラスチック (FRP) などの複合材料が建設材料として盛んに用いられるようになった。等方性平板に比べて、繊維強化プラスチックなどの異方性積層板では板厚方向の高次成分の影響が顕著になる。異方性積層板の解析には三次せん断変形理論などの高次理論が多く用いられている<sup>1)~3)</sup>。しかしながら、三次せん断変形理論では、種々の変位場を用いる理論が存在しており、変位場の採り方が解の精度に与える影響については明らかにされていない。

等価単層理論に基づく異方性積層板の曲げ解析において、変位仮定に基づく厚板理論により計算される面外応力の精度が悪いことが指摘されている<sup>4)</sup>。例えば、一次せん断変形理論では、面外垂直応力を計算することができず、面外せん断応力は板厚内で一定値となる。また、三次せん断変形理論を用いても、面外応力を放物線形状で計算できるものの、応力の境界条件と層境界での連続性を満足する面外応力は得られない。

そこで、本研究では、各種の三次せん断変形理論と一次せん断変形理論に基づく級数解を統一的に定式化し、三次せん断変形理論の変位場の採り方が解に与える影響を考察する。さらに、面外応力を厚板理論の構成方程式から計算せずに、三次元弾性理論の応力の平衡方程式を用いて、応力の境界条件と層境界での連続性を満足する面外応力の3成分をより一般的に定式化する。これを三次せん断変形理論に適用して、面外応力の精度改善の効果を検証する。

## 2. 三次せん断変形理論の変位場

完全な三次せん断変形理論の変位場を次式に示す。

$$\left. \begin{aligned} u &= u_0 + z\phi_x + z^2\theta_x + z^3\lambda_x \\ v &= v_0 + z\phi_y + z^2\theta_y + z^3\lambda_y \\ w &= w_0 + z\phi_z + z^2\theta_z + z^3\lambda_z \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式(1)はKantら<sup>1)</sup>が用いている変位場であり、それに対して、図-1に示すようにPandyaら<sup>2)</sup>は $w$ の $z^0$ 項までを、Loら<sup>3)</sup>は $z^2$ 項までを用いている。一方、一次せん断変形理論(FSD)では、 $u$ と $v$ に $z$ 項までを用い、 $w$ には $z^0$ 項までを用いる。

$$\left. \begin{aligned} u &= u_0 + \boxed{z\phi_x} + z^2\theta_x + \boxed{z^3\lambda_x} \\ v &= v_0 + \boxed{z\phi_y} + z^2\theta_y + \boxed{z^3\lambda_y} \\ w &= \boxed{w_0} + \boxed{z\phi_z} + \boxed{z^2\theta_z} + \boxed{z^3\lambda_z} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{FSD} \\ \text{Pandya} \\ \text{Lo} \\ \text{Kant} \end{array}$$

図-1 三次せん断変形理論における変位場の選択

表-1 検討する三次せん断変形理論の変位場

Model No.	$w$ の変位場	dof	備考
Model-1	$w=w_0$	9	Pandya
Model-2	$w=w_0+z\phi_z$	10	-
Model-3	$w=w_0+z\phi_z+z^2\theta_z$	11	Lo
Model-4	$w=w_0+z\phi_z+z^2\theta_z+z^3\lambda_z$	12	Kant
Model-5	$w=w_0+z^2\theta_z$	10	-

本研究では、変位場の採り方が面外応力に及ぼす影響を調べるために、式(1)の完全な三次せん断変形理論の変位場において、 $u$ と $v$ は式(1)と同様に統一し、表-1に示す5種類の $w$ の変位場を検討する。

## 3. 三次せん断変形理論の平衡方程式

図-2に示す長さ $a$ 、幅 $b$ 、板厚 $h$ の積層板において、板中央面にデカルト座標 $(x, y, z)$ を設ける。さらに、単層板(ラミナ)における材料の主軸を(1, 2, 3)とし、配向角を $\theta$ とする。

式(1)をひずみ-変位関係式に用いてひずみを計算し、それを一般化されたフックの法則に用いて、各層における応力を計算する。これより、等価単層理論に基づき次の合応力が得れる。

$$\begin{bmatrix} N_x & M_x & R_x & P_x \\ N_y & M_y & R_y & P_y \\ N_z & M_z & R_z & 0 \\ N_{xy} & M_{xy} & R_{xy} & P_{xy} \\ Q_y & M_{yz} & R_{yz} & P_{yz} \\ Q_x & M_{xz} & R_{xz} & P_{xz} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} \begin{Bmatrix} \sigma_x^{(k)} \\ \sigma_y^{(k)} \\ \sigma_z^{(k)} \\ \tau_{xy}^{(k)} \\ \tau_{yz}^{(k)} \\ \tau_{xz}^{(k)} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ z^2 \\ z^3 \end{Bmatrix} dz \quad (2)$$

積層板の上縁( $z=-h/2$ )に分布荷重 $q$ が作用する場合の仮想外力仕事を計算し、これらを仮想仕事の原理に用いて、偏微分項に部分積分を実施した内部積分

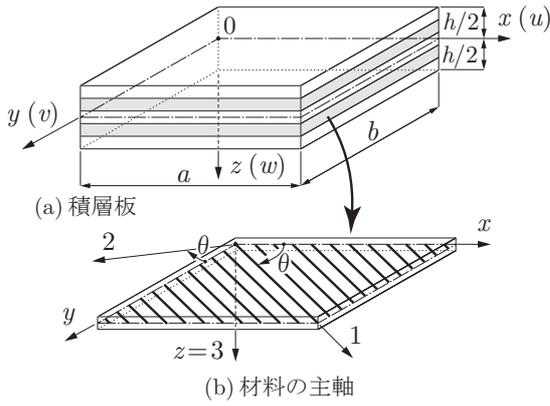


図-2 積層板と座標系

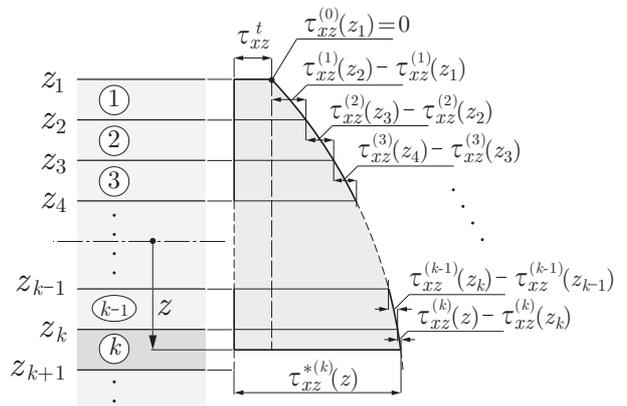


図-3  $k$ 層目の面外応力の計算

項より12個の平衡方程式が得られる。この平衡方程式を、面外（曲げ）問題と面内（伸縮）問題の式に分離して次のように表す。

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q &= 0 & (\delta w_0) \\
 \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x &= 0 & (\delta \phi_x) \\
 \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - Q_y &= 0 & (\delta \phi_y) \\
 \frac{\partial R_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial R_{yz}}{\partial y} - 2M_z + \frac{h^2}{4}q &= 0 & (\delta \theta_z) \\
 \frac{\partial P_x}{\partial x} + \frac{\partial P_{xy}}{\partial y} - 3R_{xz} &= 0 & (\delta \lambda_x) \\
 \frac{\partial P_y}{\partial y} + \frac{\partial P_{xy}}{\partial x} - 3R_{yz} &= 0 & (\delta \lambda_y) \\
 \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= 0 & (\delta u_0) \\
 \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} &= 0 & (\delta v_0) \\
 \frac{\partial M_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial M_{yz}}{\partial y} - N_z - \frac{h}{2}q &= 0 & (\delta \phi_z) \\
 \frac{\partial R_x}{\partial x} + \frac{\partial R_{xy}}{\partial y} - 2M_{xz} &= 0 & (\delta \theta_x) \\
 \frac{\partial R_y}{\partial y} + \frac{\partial R_{xy}}{\partial x} - 2M_{yz} &= 0 & (\delta \theta_y) \\
 \frac{\partial P_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial P_{yz}}{\partial y} - 3R_z - \frac{h^3}{8}q &= 0 & (\delta \lambda_z)
 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

#### 4. Navierの方法による級数解

配向角  $\theta$  が  $0$  または  $90^\circ$  の単層板を重ね合わせた直交積層板と、配向角  $\theta$  と  $-\theta$  の単層板を板厚方向に逆対称となるように重ね合わせた逆対称斜交積層板に対して、変位成分を周辺単純支持の境界条件を満足する二重フーリエ級数で仮定する。式(3)の平衡方程式を変位で表し、変位関数と荷重を代入して、次の任意の  $(m, n)$  項に対する12元の連立方程式が得られる。

$$\mathbf{S}_{mn} \mathbf{F}_{mn} = \mathbf{P}_{mn} \quad (\text{for } m, n) \quad (4)$$

ここに、剛性行列  $\mathbf{S}_{mn}$  は12次の正方行列である。未知フーリエ係数ベクトル  $\mathbf{F}_{mn}$  と荷重ベクトル  $\mathbf{P}_{mn}$  は12次の列ベクトルであり、式(4)は式(1)の完全な三次せん断変形理論の変位場を用いた場合の連立方程式である。

#### 5. 面外応力の改良

本研究では、三次元弾性理論の応力の平衡方程式から面外応力を計算することにより精度の改善を図る。図-3に示す積層板の  $k$  層目において、三次元弾性理論の応力の平衡方程式より、次式が成り立つ。ただし、物体力は作用しないものとする。

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{\partial \sigma_x^{(k)}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}^{(k)}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}^{(k)}}{\partial z} &= 0 \\
 \frac{\partial \tau_{xy}^{(k)}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y^{(k)}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}^{(k)}}{\partial z} &= 0 \\
 \frac{\partial \tau_{xz}^{(k)}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}^{(k)}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z^{(k)}}{\partial z} &= 0
 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

式(5)において、左辺の第3項を  $z$  に関して積分すると、面外応力の3成分が得られる。このとき、上下縁での応力の境界条件と層境界での応力の連続性を満たす面外応力を次の手順で求める。

図-3に示すように、 $k$  層目の座標  $z$  での面外せん断応力  $\tau_{xz}^{*(k)}$  は、上縁での応力の境界条件  $\tau_{xz}^t$  に、上縁から  $z$  までの各層境界における応力差を全て加えることによって得られる。 $\tau_{yz}^{*(k)}$  も同様に求める。また、 $\sigma_z^{*(k)}(z)$  は、この面外せん断応力  $\tau_{xz}^{*(k)}(z)$  と  $\tau_{yz}^{*(k)}(z)$  を式(5)の第3式に用いて求める。これらの面外応力を、 $z$  での応力と層境界での応力に分けて次のように表す。

$$\left. \begin{aligned}
 \tau_{xz}^{*(k)}(z) &= \tau_{xz}^{(k)}(z) + \bar{\tau}_{xz}^{(k)} \\
 \tau_{yz}^{*(k)}(z) &= \tau_{yz}^{(k)}(z) + \bar{\tau}_{yz}^{(k)} \\
 \sigma_z^{*(k)}(z) &= \sigma_z^{(k)}(z) + \bar{\sigma}_z^{(k)}
 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

#### 6. 数値計算例

計算モデルは、上縁に正弦荷重を受ける図-2に示す周辺単純支持された直交積層板であり、形状比を  $a/b=1$  とする。また、積層数  $N$  を4とし、 $[0/90^\circ/90^\circ/0]$  について、板厚比  $b/h=1/10, 3/10$  の2ケースを計算する。

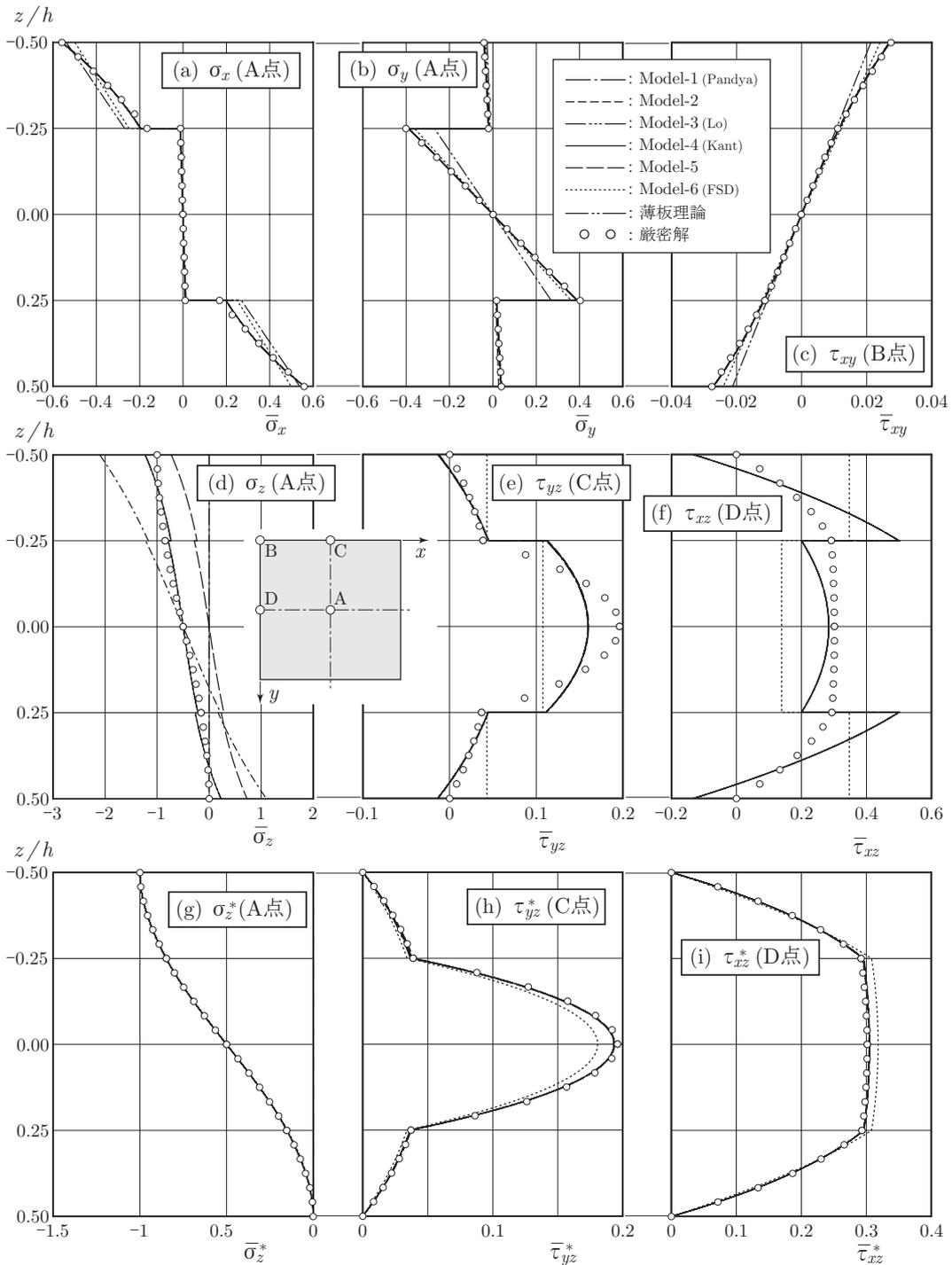


図-4 応力の板厚方向の分布 (直交積層板 [0/90°/90°/0],  $h/b=1/10$ )

図-4 に板厚比  $h/b=1/10$ , 図-5 に  $h/b=3/10$  の直交積層板における面内応力と面外応力, 式 (6) から計算した  $\sigma_z^*, \tau_{yz}^*, \tau_{xz}^*$  の板厚方向の分布図を示す。○印は三次元弾性理論による厳密解を表し, 各モデルに対応する線種は図中に示している。

まず, 面外応力については, 構成方程式から計算される面外応力  $\sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{xz}$  は極めて精度が悪い。  $w=w_0$  の変位場を用いる三次せん断変形理論 Model-1 と一次せん断変形理論 Model-6 では  $\sigma_z$  を計算できず, Model-6 では面外せん断応力  $\tau_{yz}, \tau_{xz}$  が各層で板厚方向に一定値となる。また, 三次せん断変形理論のどの

モデルでも応力の境界条件と層境界での連続性を満足しておらず, 厳密解に対して誤差が大きくなっている。それに対して, 三次元弾性理論の応力の平衡方程式から求めた  $\sigma_z^*, \tau_{yz}^*, \tau_{xz}^*$  では, どのモデルでも応力の境界条件と層境界での連続性を満足し, 厳密解と良く一致した面外応力の3成分を計算できている。

また, 三次せん断変形理論で,  $w$  の取り方を変えた Model-1~5 の計算値はほぼ同じで, 大きな違いが見られない。板厚比  $h/b$  が大きくなると, 応力分布の非線形性が強くなり, 三次せん断変形理論を用いても誤差が大きくなっている。

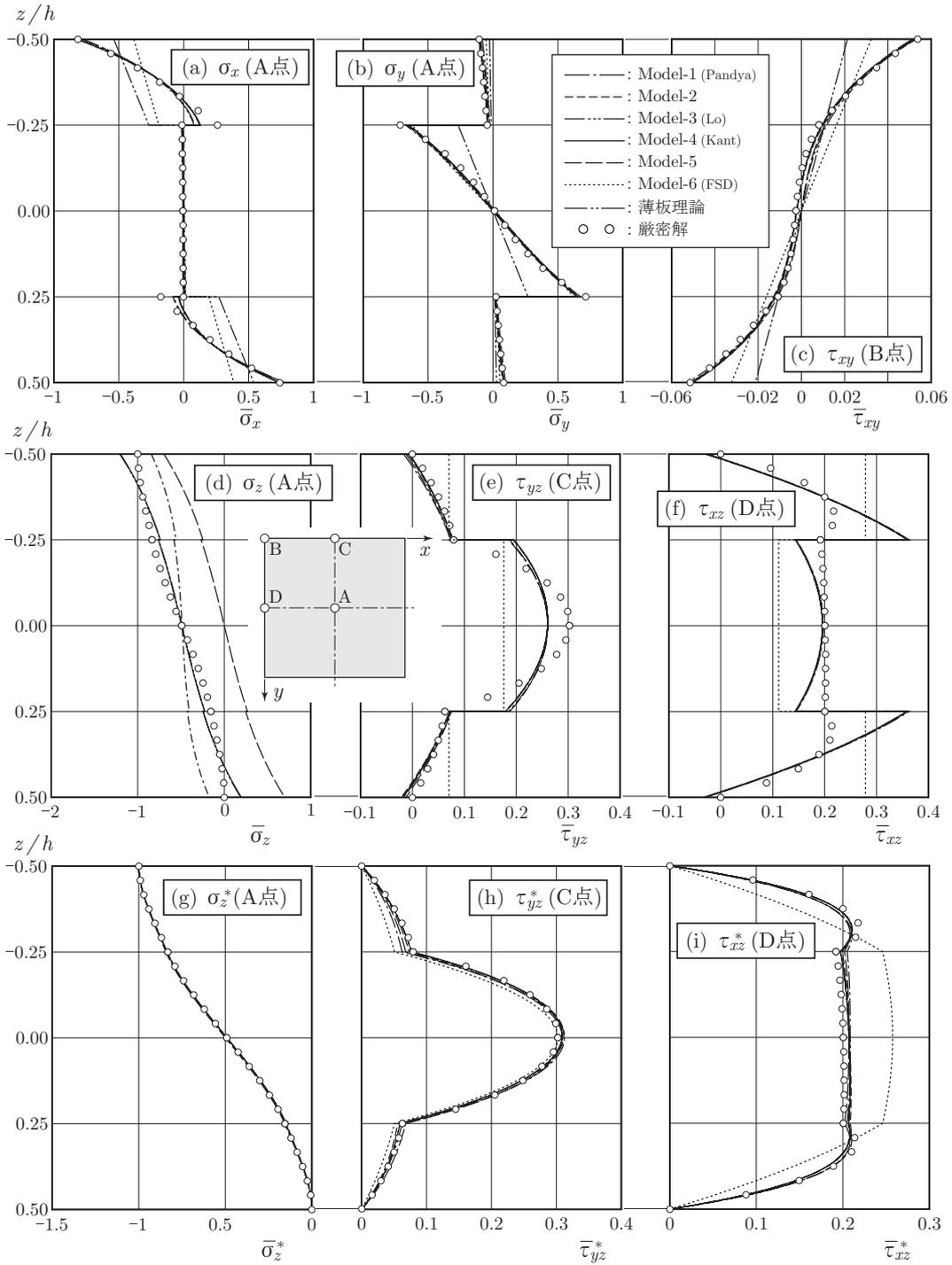


図-5 応力の板厚方向の分布 (直交積層板 [0/90°/90°/0],  $h/b=3/10$ )

## 7. まとめ

等価単層理論を用いた異方性積層板の曲げ解析において、三次元弾性理論の応力の平衡方程式を用いて、応力の境界条件と層境界の連続性を満足する面外応力の3成分を計算できる。また、三次せん断変形理論においては、 $w$ の変位場をどのように採っても厳密解に対する誤差はほぼ同程度となる。

## 参考文献

- 1) Kant, T. and Swaminathan, K.: Analytical solutions for static analysis of laminated composite and sandwich

plates based on a higher order refined theory, *Composite Structures*, Vol.56, pp.329-344, 2002.

- 2) Pandya, B.N. and Kant, T.: Finite element stress analysis of laminated composite plates using higher order displacement model, *Compos Sci. Technol.*, Vol.32, pp.137-55, 1988.
- 3) Lo, K.H., Christensen, R.M., Wu, E.M.: A higher order theory of plate deformation, Part 2: Laminated plates, *Journal of Applied Mechanics*, Vol.44, pp.669-676, 1977.
- 4) 渡辺 力, 林 正: 変位場を規定するハイアラーキソリッド要素の厚板解析への適用, 土木学会論文集 A, Vol.66 No.4, pp.850-862, 2010.