

# 竹の特異な組織配列から学ぶ円筒構造の傾斜剛性の最適化に関する考察

Optimization of graded stiffness for hollow cylindrical structures learning from peculiar tissue distribution of bamboo

北海道大学工学部環境社会工学科 ○ 学生員 宮川 奨 (Sho Miyakawa)  
 北海道大学大学院工学院 学生員 谷垣 俊行 (Toshiyuki Tanigaki)  
 熊本県立大学環境共生学部 非会員 井上 昭夫 (Akio Inoue)  
 山梨大学大学院総合研究部 非会員 島 弘幸 (Hiroyuki Shima)  
 北海道大学大学院工学研究院 正員 佐藤 太裕 (Motohiro Sato)

## 1. はじめに

科学技術の諸分野で広く用いられる傾斜機能材料 (Functionally Graded Material, 以下 FGM) とは、組織が異なる複数素材の組成が連続的に変化し一体的に組み合わせられた材料であり、単一材料では発現しない優れた特性を持たせることができる。1984年、宇宙船のプロジェクトの際に導入されたのがはじまりで、船体の複合材料を傾斜配置させることによって地球大気圏の非常に高温、高压な環境に耐えることに成功した。さらに FGM は人工物だけにとどまらず、天然で実現された FGM も存在する。竹はその天然 FGM の一例だと言われている。竹は高さ方向に離散的に配置された節とともに、その断面に非常に硬い繊維である維管束を内側から外側にかけて傾斜配置させることによって、本来は曲げに弱いとされる中空円筒構造の弱点を克服していると考えられる<sup>1)</sup>。本研究は、進化の過程で優れた力学特性を獲得したと考えられる竹の組織構造が曲げ剛性に及ぼす影響を構造力学的に検証し、維管束分布がいかに巧みに剛性向上に寄与しているかを示すものである。

## 2. 竹断面の最適な組織配列

### 2.1 維管束の体積含有率の変化

図-1(a)は竹断面の維管束分布の様子を表しており、この図から竹断面の中心が比較的疎であり、表皮側に向かって密になってゆくことが読み取れる。以下ではこの維管束の配置が曲げ特性にどのような影響を及ぼすかを構造力学的により求めることとする。竹断面の中心から半径方向外側を正とする座標  $r$  を定め、原点から竹断面の厚さの中心までを  $a$ 、竹断面の肉厚さを  $h$  と定める。(図-1(b))

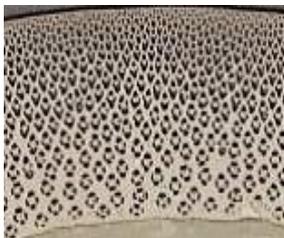


図-1(a) 竹の断面

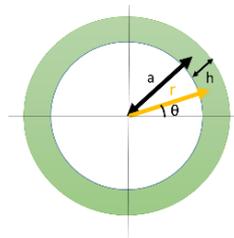


図-1(b) 竹断面の値定義

### 2.2 維管束体積含有率の関数近似

竹断面の維管束分布は増加関数のように配列していると考えられるが、適切な関数は決定されていない。そこで本研究では、多項式関数と指数関数の二つの関数近似を用いて、曲げ剛性を最大化するより適切な維管束配置を求める。多項式関数と指数関数による維管束体積含有率はそれぞれ(1)、(2)のように定められる。

$$V_f = c_0 + c_1 r + c_2 r^2 \quad (1)$$

$$V_f = c_1 e^{c_2 r} \quad (2)$$

$$a - \frac{h}{2} \leq r \leq a + \frac{h}{2}$$

( $c_0, c_1, c_2$  はそれぞれ係数)

また、維管束のヤング係数を  $E_f$ 、その周りの軟細胞のヤング係数を  $E_m$  とすると維管束を含む竹断面全体のヤング係数は次のように定めることができる。

$$E_c = E_f V_f + E_m (1 - V_f) \quad (3)$$

よって断面二次モーメントを  $I$  とすると曲げ剛性は次式で表される。

$$D_c = \int_0^{2\pi} \int_{a-\frac{h}{2}}^{a+\frac{h}{2}} \{E_f V_f + E_m (1 - V_f)\} r^3 \sin^2 \theta dr d\theta \quad (4)$$

ここで、竹断面内の維管束体積含有率の一般性を失わせないため最外面と最内面で上限と下限を設定しそれぞれ  $V_{out}=0.6, V_{inn}=0.1$  とした。したがって境界条件は、

$$c_0 + c_1 \left(a - \frac{h}{2}\right) + c_2 \left(a - \frac{h}{2}\right)^2 \geq V_{inn} \quad (5)$$

$$c_0 + c_1 \left(a + \frac{h}{2}\right) + c_2 \left(a + \frac{h}{2}\right)^2 \leq V_{out}$$

$$c_1 e^{c_2 \left(a - \frac{h}{2}\right)} \geq V_{inn}, c_1 e^{c_2 \left(a + \frac{h}{2}\right)} \leq V_{out} \quad (6)$$

以下、計算を容易にするため

$$r' = \frac{1}{h} \left[ r - \left(a - \frac{h}{2}\right) \right] \text{ と定義し、維管束の体積含有率は}$$

$$V_f(r') = c'_0 + c'_1 r' + c'_2 r'^2 \quad (7)$$

$$V_f(r') = c'_1 e^{c'_2 r'} \quad (8)$$

$$(0 \leq r' \leq 1)$$

( $c'_0, c'_1, c'_2$  はそれぞれ係数)

多項式近似では、(5)、(7)から線形計画法により曲げ剛性を最大化するそれぞれの係数を求めたところ図-2 となる。このグラフから曲げ剛性を最大化する維管束配置は  $V_f < 0.35$  では二次関数によって定められ、それを境に二次の係数が 0 となり  $V_f \geq 0.35$  では一次関数によって定められる。ここで、竹は地表面からの高さに比例して断面積が小さくなり、維管束体積含有率は高くなるという事実が過去の実測から明らかとなっている<sup>2)</sup>。つまり、地表面からの高さが高くなるにつれて維管束配置の形状は二次関数から一次関数に移行することがわかる。また、指数関数近似に関しても、同様な解析を行いここでは計算が乱雑なため数値解析ソフト Mathematica を用いて適切な係数を求めたところ図-3 を得ている。

### 2.3 解析結果における曲げ剛性

図-4は、2.2の解析結果より曲げ剛性を算出し、維管束を等分布させた場合の曲げ剛性と比較することにより得られる曲げ剛性の改善率を示している。このグラフから、二つの関数近似による曲げ剛性の改善率は、ともに1~3%程度であった。断面の諸量  $h/a$  の値が大きくなればなるほど改善率は高くなると考えられる。さらに多項式と指数関数の差で見ると  $V_f^{av}$  に関わらず、多項式近似の値が若干高くなっている。また、多項式近似では一次関数で表される  $V_f^{av}$  の時に改善率の差は最大になっていることから、実際の竹の維管束配置においては線形分布も表現可能な多項式近似がより適切であると考察できた。

### 3. 組織構造の実測値と解析値の比較

図-5は Amadaら<sup>2)</sup>により得られた、実際の竹を地表面から節ごとに番号をつけ  $n=1, 2, 3, \dots$  とし、 $n=14, 15, 23, 42$  の断面の維管束分布の様子を顕微鏡で観察したデータを再現したものである。このとき節間番号  $n$  が大きくなるにつれ地表面からの高さが増すため、維管束の平均体積含有率  $V_f^{av}$  は増す。図-5から  $n=23 (V_f^{av}=0.28)$  までの3つのデータは二次関数分布を示し、 $n=42 (V_f^{av}=0.35)$  ではほぼ線形分布を示していることが読み取れる。これは今回の数値解析の結果と一致する。実際に図-5と同じ条件の竹断面の維管束配置を多項式近似を用いて数値解析により再現した結果が図-6である。図-5と図-6を比較するとグラフの概形と値が非常に一致していることがわかる。このことから竹の組織配列は平均体積含有率に対応して非常に巧みに曲げ剛性を最大化しているといえる。

### 4. まとめ

- 本研究から得られる知見は以下のとおりである。
- 竹の断面の維管束傾斜分布を表現する関数として、本研究では多項式と指数関数を用いて検証を行った。これにより傾斜分布は均等分布に比べ曲げ剛性を高めていることが示された。
  - 多項式と指数関数の比較では、若干ではあるが多項式が曲げ剛性向上効果があることがわかった。さらに、 $h/a$  が大きくなるほど、組織配置は曲げ剛性向上に対しより影響を及ぼしていることが確認された。
  - 実際の竹に対して顕微鏡で観察された維管束分布と曲げ剛性を最大化する多項式分布は非常に一致する。
  - 本研究の解析結果と実際の竹の組織構造との整合性より、竹断面における維管束の分布は、曲げ剛性を最大化するように巧みに最適化されていることが示唆された。

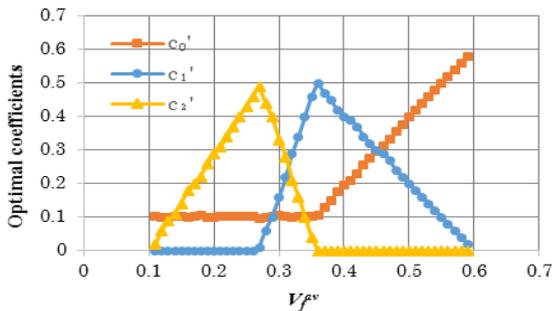


図-2 多項式近似の場合における適切な係数変化

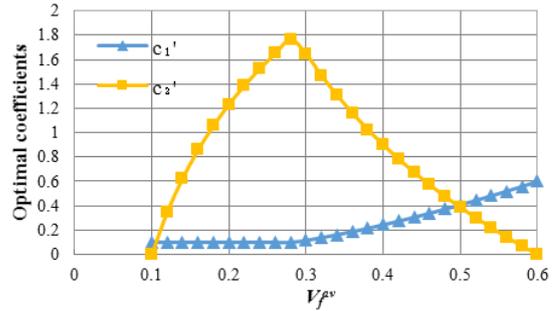


図-3 指数関数近似における曲げ剛性を最大化する係数の変化

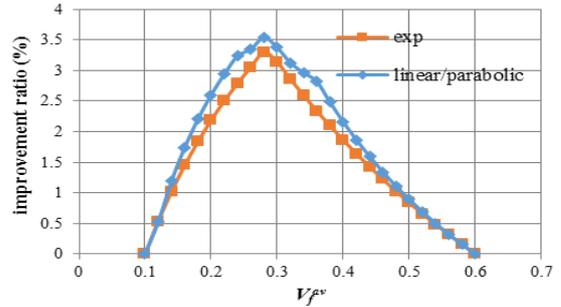


図-4 多項式近似と指数関数近似の等分布配置に対する曲げ剛性改善率

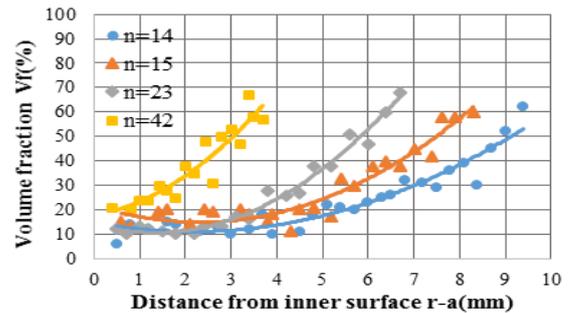


図-5 竹断面における維管束分布の実測値<sup>2)</sup>

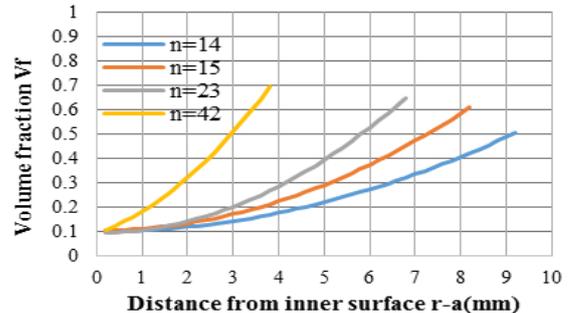


図-6 竹断面における維管束分布の解析値 (多項式近似)

### 謝辞

本研究は科研費基盤研究(B)(研究課題番号:15H04207, 研究代表者:佐藤太裕)により実施されたことを付記し、関係各位にお礼申し上げます。

### 参考文献

- 1) 佐藤太裕, 谷垣俊行, 佐藤諭佳, 島弘幸, 井上昭夫: 竹の節・組織構造が織り成す円筒体としての合理的な構造特性の理論的解明, 土木学会論文集 A2 (応用力学), Vol.72 (投稿中)
- 2) S. Amada, Y. Tamotsu, T. Munekata, Y. Nagase and H. Shimizu: Fiber texture and mechanical graded structure of bamboo, Composites Part B, Vol.28B, pp.13-20, 1996.