

対数正規分布による需要・供給の変動を考慮した 確率的利用者均衡配分モデルに関する研究

A study on stochastic user equilibrium assignment model
with stochastic demand and supply by lognormal distribution

北海道大学工学部 ○学生員 峪 龍一 (Ryuichi Tani)
北海道大学大学院工学研究院 学生員 加藤 哲平 (Teppei Kato)
北海道大学大学院工学研究院 正会員 内田 賢悦 (Kenetsu Uchida)

1 はじめに

地震や豪雨等の自然災害が発生した時、避難に加え、災害後の緊急援助・復旧が行われるためには一定の交通機能が維持されている必要がある。そのためには災害を想定した道路ネットワーク機能の評価が必要である。災害が発生すると、道路区間が損傷または途絶し、交通容量が低下した状態に陥り、通常時とは異なる交通需要が発生すると考えられる。したがって、確率的に生起する災害により生じうる状況を考慮した上でネットワーク評価を行う必要があり、災害時に発生しうる交通需要と交通容量を確率的に捉えた均衡配分モデルが求められる。

近年、交通ネットワーク上の不確実性を考慮した均衡配分モデルが多く提案されている。例えば、Sumalee and Xu¹⁾と Zhou and Chen²⁾は交通需要が対数正規分布に従う均衡配分モデルを提案した。これらのモデルではリンク交通量は互いに独立と仮定されている。Lam et al.³⁾はリンク交通量が互いに相関を持つ正規分布に従うと仮定した均衡配分モデルを提案した。本研究では上記で提案されたモデルを拡張し、リンク交通量の相関を考慮した上で、対数正規分布で表現される確率的な交通需要と交通容量を考慮した確率的均衡配分モデルを提案する。

災害時に発生しうる道路区間の途絶は交通容量が0になる事象と捉えられる。これを確率変数で表現するときリンク容量が高い確率で0に近づく場合を考える必要がある。正規分布等を用いてこれを表現しようとする、負の交通容量が生起する確率が正となり交通容量の定義に反する。これに対し、対数正規分布は常に非負であり、リンクの途絶を近似的に表現できる。したがって、本研究で提案する確率的均衡配分モデルは災害時に発生しうるリンクの途絶を考慮する場合に有用である。

2 記号

本稿で扱う主な記号を以下に示す。

W: ネットワーク中の OD ペア集合
K_w: OD ペア w 間の経路集合
A: ネットワーク中のリンク集合
Q_w: OD ペア w 間の確率的交通需要
q_w: OD ペア w 間の確率的交通需要の期待値
cv_w: OD ペア w 間の確率的交通需要の変動係数
F_{w,k}: OD ペア w 間を通る経路 k の確率的交通量
f_{w,k}: OD ペア w 間を通る経路 k の確率的交通量の期待値

V_a: リンク a の確率的交通量

C_a: リンク a の確率的交通容量

T_a: リンク a の確率的リンク移動時間

T_{w,k}: OD ペア w 間を通る経路 k の確率的経路移動時間

3 ネットワーク中の確率変数

3.1 ネットワーク中の交通量

OD ペア間の確率的交通需要 Q_w は、対数をとると平均が μ_w^q 、分散が $(\sigma_w^q)^2$ の正規分布 $N(\mu_w^q, (\sigma_w^q)^2)$ となる式(1)で表される対数正規分布に従うと仮定する。

$$Q_w \sim LN\left(\mu_w^q, (\sigma_w^q)^2\right) \quad (1)$$

OD 交通量の変動係数を cv_w とすると、その期待値と分散は変動係数を用いてそれぞれ式(2)、式(3)で表せる。

$$E[Q_w] = q_w \quad (2)$$

$$\text{var}[Q_w] = (cv_w \cdot q_w)^2 \quad (3)$$

一方、対数正規分布に従う経路交通量、その期待値と標準偏差はそれぞれ式(4)、式(5)、式(6)で与えられる。

$$F_{w,k} = p_{w,k} Q_w \quad (4)$$

$$f_{w,k} = E[F_{w,k}] = p_{w,k} E[Q_w] = p_{w,k} \cdot q_w \quad (5)$$

$$\sqrt{\text{var}[F_{w,k}]} = p_{w,k} \sqrt{\text{var}[Q_w]} = p_{w,k} \cdot q_w \cdot cv_w \quad (6)$$

ここで、Q_w の分散は以下のように保存される。

$$\begin{aligned} \text{var}[Q_w] &= \sum_{k \in K_w} \sum_{j \in K_w} \text{cov}[F_{w,k}, F_{w,j}] \\ &= \sum_{k \in K_w} \sum_{j \in K_w} p_{w,k} \cdot p_{w,j} (cv_w \cdot q_w)^2 \\ &= (q_w \cdot cv_w)^2 \left(\sum_{k \in K_w} p_{w,k} \right)^2 = (q_w \cdot cv_w)^2 \end{aligned} \quad (7)$$

リンク交通量の共分散と分散は以下で与えられる。

$$\begin{aligned} \text{cov}[V_a, V_b] &= \text{var} \left[\sum_{w \in W} \sum_{k \in K_w} \delta_{w,k,a} \cdot \delta_{w,k,b} \cdot F_{w,k} \right] \\ &= \sum_{w \in W} \sum_{k \in K_w} \sum_{j \in K_w} \delta_{w,k,a} \cdot \delta_{w,j,a} \cdot \text{cov}[F_{w,k}, F_{w,j}] \\ &\quad (\text{if } a = b, \text{ var}[V_a] = \text{cov}[V_a, V_b]) \end{aligned} \quad (8)$$

対数正規分布に従う確率変数 Z の平均と共分散を用いて、 Z に対応する正規分布の平均と共分散を以下のように表現できる。なお、Abu-Dayya and Beaulieu⁴⁾により対数正規分布の和は対数正規分布として近似可能であり、その平均、分散は確率変数間の相関の有無を問わず、それぞれの平均、分散を足し合わせることで近似的に表現できる。式(10)、式(11)は、後述の式(18)、式(19)等にて用いられる。なお、 $a = b$ のとき式(11)は分散を表す。

$$Z \sim LN(\mu_z, (\sigma_z)^2) \quad (9)$$

$$\mu_z = \ln(E[Z]) - \frac{1}{2} \ln\left(1 + \frac{\text{var}[Z]}{(E[Z])^2}\right) \quad (10)$$

$$\sigma_{z_a, z_b} = \ln\left(1 + \frac{\text{cov}[Z_a, Z_b]}{E[Z_a]E[Z_b]}\right) \quad (11)$$

3.2 ネットワーク中の確率的移動時間

確率的リンク移動時間は BPR 関数に確率変数である V_a と C_a を代入することで与えられると仮定する。なお、対数正規分布に従うリンク交通容量を仮定する。

$$t_a(V_a, C_a) = t_a^0 \left(1 + \beta \left(\frac{V_a}{C_a}\right)^n\right) \quad (12)$$

ここで、リンク交通量 V_a とリンク交通容量 C_a をまとめると、確率的リンク移動時間は以下のように表せる。

$$t_a(V_a, C_a) = t_a(D_a) = t_a^0 (1 + \beta (D_a)^n) \quad (13)$$

where

$$D_a = \frac{V_a}{C_a} \quad (14)$$

経路交通量、リンク交通量、リンク交通容量は多変量対数正規分布で与えられる。ただし、交通容量はリンク間の相関がないものとする。

リンク移動時間に D_a の平均値の周りで m 次のテーラー展開を施し、期待値と共分散を以下のように得る。

$$E[T_a] = \sum_{i=0}^m b_{ia} E[D_a^i] \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \text{cov}[T_a, T_b] &= E[T_a \cdot T_b] - E[T_a]E[T_b] \\ (\text{if } a = b, \text{ var}[T_a] &= \text{cov}[T_a, T_b]) \end{aligned} \quad (16)$$

where

$$E[T_a \cdot T_b] = \sum_{i_1=0}^m \sum_{i_2=0}^m b_{i_1 a} \cdot b_{i_2 b} \cdot E[D_a^{i_1} \cdot D_b^{i_2}] \quad (17)$$

ここで $D_{a,b}^{(i_1, i_2)} = D_a^{i_1} \cdot D_b^{i_2}$ とおくと $D_{a,b}^{(i_1, i_2)}$ に対応する正規分布の平均と分散はそれぞれ式(18)、式(19)で得られる。

$$\mu_{a,b}^{i_1, i_2} = i_1 \mu_a^d + i_2 \mu_b^d \quad (18)$$

$$(\sigma_{a,b}^{i_1, i_2})^2 = E\left[\left\{(i_1 \cdot X_a + i_2 \cdot X_b) - (i_1 \cdot \mu_a^d + i_2 \cdot \mu_b^d)\right\}^2\right] \quad (19)$$

$$= i_1^2 \cdot (\sigma_a^d)^2 + i_2^2 \cdot (\sigma_b^d)^2 + 2i_1 \cdot i_2 \cdot \sigma_{a,b}^d$$

$\mu_{a,b}^{d(i_1, i_2)}$ と $\sigma_{a,b}^{d(i_1, i_2)}$ を用いることで $E[D_a^{i_1} \cdot D_b^{i_2}]$ が求められる。式(19)で用いられる $\sigma_{a,b}^d$ は確率変数 D_a と D_b に対応する正規分布の共分散であり式(11)により求められる。

$$\text{cov}[D_a, D_b] = E[D_a \cdot D_b] - E[D_a]E[D_b] \quad (20)$$

where

$$E[D_a \cdot D_b] = E\left[\frac{V_a}{C_a} \cdot \frac{V_b}{C_b}\right] = E\left[(V_a \cdot V_b) \cdot (C_a^{-1} \cdot C_b^{-1})\right] \quad (21)$$

ここまでで求められたリンク移動時間の平均と共分散を用いて、経路移動時間の平均と共分散を計算できる。

$$E[T_{w,k}] = \sum_{a \in A} \delta_{w,k,a} \cdot E[T_a] \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \text{cov}[T_{w,k}, T_{w,j}] &= \text{cov}\left[\sum_{a \in A} \delta_{w,k,a} \cdot T_a, \sum_{b \in A} \delta_{w,j,b} \cdot T_b\right] \\ &= \sum_{a \in A} \sum_{b \in A} \delta_{w,k,a} \cdot \delta_{w,j,b} \cdot \text{cov}[T_a, T_b] \\ (\text{if } k = j, \text{ var}[T_{w,k}] &= \text{cov}[T_{w,k}, T_{w,j}]) \end{aligned} \quad (23)$$

4 確率的利用者均衡配分モデルの定式化

上記までの定式化に従い、経路移動コストを式(24)のように定義し、これを経路選択基準として用いる。

$$\eta_{w,k} = E[T_{w,k}] + \gamma \cdot \text{var}[T_{w,k}] \quad (24)$$

ここで、 γ はリスク回避度を表す定数である。経路移動時間コストにランダム効用理論を適用し、経路選択について同一で互いに独立なガンベル分布 $\varepsilon_{w,k}$ による認知誤差を想定する。なお、 θ は認知誤差に関するパラメータである。これにより、式(25)、式(26)、式(27)のようにロジット型モデルとして SUE を定式化できる。

$$f_{w,k} = q_w \cdot p_{w,k}(\eta_w(\mathbf{f}_w)) \quad (25)$$

where

$$p_{w,k} = \Pr(\eta_{w,k} + \varepsilon_{w,k} \leq \eta_{w,k'} + \varepsilon_{w,k'}) \quad (26)$$

$$p_{w,k} = \frac{\exp(-\theta \cdot \eta_{w,k})}{\sum_{k \in K_w} \exp(-\theta \cdot \eta_{w,k})} \quad (27)$$

5 まとめ

本研究では、交通需要と交通容量が対数正規分布により確率的に変動し、リンクや経路間の相関を考慮した確率的利用者均衡配分モデルを提案した。当日の発表では、テストネットワークにおいて数値実験を行い、提案したモデルを検証し、その妥当性を示す。

参考文献

- 1) Agachai Sumalee, Wei Xu :First-best marginal cost toll for a traffic network with stochastic demand. Transportation Research Part B 45(1) (2011)41–59
- 2) Zhong Zhou, Anthony Chen: Comparative analysis of three user equilibrium models under stochastic demand. Journal of Advanced Transportation 42(3) (2008)239–263
- 3) William H.K. Lam, Hu Shao, Agachai Sumalee: Modeling impacts of adverse weather conditions on a road network with uncertainties in demand and supply. Transportation Research Part B 42(10) (2008)890–910
- 4) Adnan A. Abu-Dayya, Norman C. Beaulieu: Outage probabilities in the presence of correlated lognormal interferers. IEEE Transactions on Vehicular Technology 43(1) (1994)164–173