底面摩擦を考慮した円形跳水現象の定式化

The formulation of circular hydraulic jump with frictional forces

北海道大学大学院工学院　○学生員　有雅　正修(Masanobu Ariga)
北海道大学大学院工学研究院　正員　山田　朋人(Tomohito Yamada)
大阪工業大学情報科学部　正員　横川　美和(Miwa Yokokawa)
北海道大学大学院工学研究院　正員　泉　典洋(Norihiro Izumi)

1. はじめに

円形跳水現象とは，流体の慣性力と重力の比を示すFroude 数が，射流部から常流部に不連続的，かつ円形に遷移する現象である．我々の身近では，図-1 に示すように台所のシンクで見られる現象である．蛇口からシンクに流下した水は底面に落下してから落下地点を中心に放射状に拡がるが，このとき中心からある距離の範囲では射流部となる（図-1 中 (1)）.一方，中心からある距離の範囲を超えると単位幅流量が減少するため流速が減少し，Froude 数が 1 を下回る地点（図-1 中 (2)）で円形に跳水が発生する[1].台所のシンクという小規模なスケールにおける現象では，地球の自転によるコリオリ力の効果を無視することができ，非回転場における現象として近似できる．一方，大気スケールの現象としてガストフロントの形成にも円形跳水現象が関わっていることが報告されている[2]．ガストフロントとは，冷気と周囲の暖気の間に前線が形成される現象であり、積乱雲からの強い下降気流によりもたらされた冷たい風が地面にぶつかり，衝突点から放射状にある距離離れた地点で発散する際に生じる現象である[3]．ガストフロントは数十キロの長さを有し,形成にはコリオリ力の効果も考慮する必要があり，回転場における検討も必要となる．

1908 年に Rayleigh[4]が跳水現象に関して研究を始めて以来，様々な分野でそれぞれの目的に向けた，回転条件を問わない円形跳水現象に対しての研究が行われてきた．例えば，機械系分野においてガスタービン内の高速回転(50rpm 以上)ディスク上の熱輸送を円滑に行うことを目的に行われた実験的[5), 6), 7)]，理論的[8), 9)]研究，化学分野において効率的な液体混合，酸素水製作などを目的に行われた非回転ディスク上での流体の半径方向への拡がり方の検討[10)]，超高速回転(500rpm 以上)ディスク上での円形跳水発生位置の検討[11), 12)]などが挙げられる．また非回転条件における円形跳水を流体力学として理解を深めるため，円形跳水現象の実験を初めて行った Watson[13)]の研究，浅水流方程式を用いた円形跳水現象の定式化の研究[14)]，浅水流方程式に粘性を考慮した円形跳水現象の定式化の研究[15), 16)]，円形跳水現象後の Froude 数を議論した研究[17)]などが挙げられるが，底面摩擦の効果を式として考慮に入れた定式化はほとんど行われていない．

そこで本研究の目的は，円形跳水現象を理解することであり，底面を摩擦のある地形であると捉え，底面の摩擦を考慮した場で発生する円形跳水現象の定式化を行うことである．2 章に浅水流方程式を用いた円形跳水現象の定式化，3 章に浅水流方程式に粘性の効果を加えた式を用いた円形跳水現象の定式化，4 章に 2，3 章で導出した式を数値的に解いた解を用いた比較，最後に 5 章でまとめを行う．

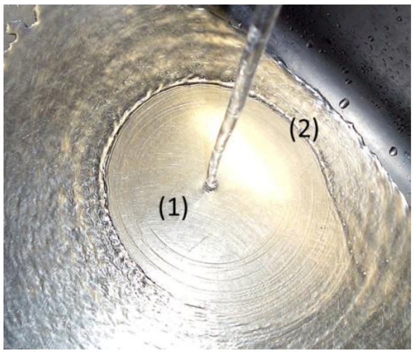

図-1 台所のシンクにおける円形跳水現象
(英語版 Wikipedia，図 2 より転載)

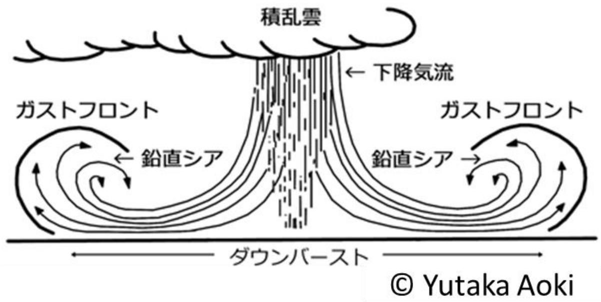

図-2 ガストフロントの形成過程を示す図

2. 浅水流方程式に底面摩擦力の効果を加味した円形跳水現象の定式化

2.1 定式化と無次元化

回転している平坦面上を流れる流体は極座標で書いた以下の浅水流方程式で表される．

$$u\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{r}}+\frac{v}{\mathrm{r}}\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \theta}-\frac{v^2}{r}-fv=-g\frac{\partial \mathrm{h}}{\partial \mathrm{r}}-\frac{\tau_{\mathrm{br}}}{\rho \mathrm{h}} \tag{1}$$

$$v\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial \mathrm{r}}+\frac{v}{r}\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial \theta}+\frac{\mathrm{vu}}{\mathrm{r}}+fu=-\frac{g}{r}\frac{\partial \mathrm{h}}{\partial \theta}-\frac{\tau_{b\theta}}{\rho h} \tag{2}$$

$$\frac{1}{\mathrm{r}}\frac{\partial \mathrm{uhr}}{\partial \mathrm{r}}+\frac{1}{r}\frac{\partial \mathrm{vh}}{\partial \theta}=0 \tag{3}$$

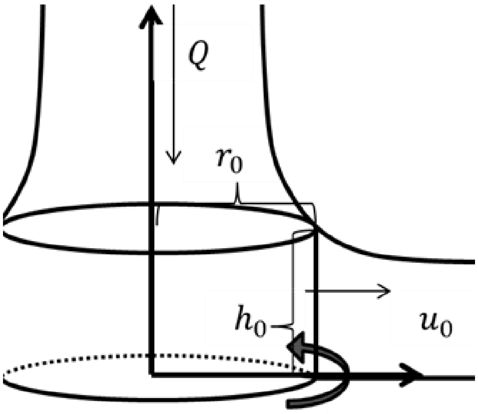

図-3 無次元化に用いるパラメータの説明

ここでr, θはそれぞれ半径方向，帯状方向の座標，u および v それぞれのr, θ方向の流速成分，h は水深，τ_{br}，$\tau_{b\theta}$はそれぞれr, θ方向の底面せんだん力成分，gは重力加速度，ρは水の密度，f はコリオリパラメータを示す．また，底面せんだん力は底面摩擦係数C_fを用いて式(4)のように表せる．

$$(\tau_{br},\ \tau_{b\theta}) = \rho C_f \sqrt{u^2+v^2}(u, v) \tag{4}$$

また図-3 のように流下する流体の流量を Q，半径 $r=r_0$を通過する流体の流厚をh_0，流速をu_0とし，式(5)のような無次元パラメータを定義する．

$$u = u_0\hat{u}, v = u_0\hat{v}, h = h_0\hat{h}, r = r_0\hat{r},$$
$$F_0 = \frac{u_0}{\sqrt{gh_0}}, Ro = \frac{u_0}{fr_0}, \beta = 2C_f \tag{5}$$

式(5)を用いて式(1)-(3)の無次元化を行うと式(6)-(8)を得ることができる．

$$u\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{v^2}{r} - R_0^{-1}v = -F_0^2\frac{\partial h}{\partial r} - \beta\frac{(v^2+u^2)^{\frac{1}{2}}u}{h} \tag{6}$$

$$u\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{vu}{r} + R_0^{-1}u = -\frac{F_0^2}{r}\frac{\partial h}{\partial \theta} - \beta\frac{(v^2+u^2)^{\frac{1}{2}}v}{h} \tag{7}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial uhr}{\partial r} = 0 \tag{8}$$

式(8)から h=1/ur となることからこれを用いて式(6), (7)は以下となる．

$$\frac{du}{dr} = \frac{u\left\{\beta F_0^2 r^3 u^3 (v^2+u^2)^{\frac{1}{2}} - F_0^2 rvu(R_0^{-1}r+v) - 1\right\}}{r(F_0^2 ru^3 - 1)} \tag{9}$$

$$\frac{dv}{dr} = -\frac{R_0^{-1}r + v + \beta r^2 v(v^2+u^2)^{\frac{1}{2}}}{r} \tag{10}$$

2.2 結果と考察

2.1 で定式化した式(9)，(10)を Runge-Kutta Gill 法を用いて数値積分する．境界条件として$u(1)=1, v(1)=0$を用いる．その結果を図-4，5 に示す．図-4 は横軸に極中心からの半径，縦軸に水深をとった図であり，コリオリパラメータ f を 0～0.5 と変化させた時の水面形である．各条件における線の終端は跳水が発生し得る最も遠い位置を示しており，f=0 条件下では中心から約 24 離れた点で跳水が起き得ることを示している．コリオリパラメータの f の値を大きくすればするほど跳水が発生する半径が短くなり，f=0．5 の条件においては中心から約 3．5 離れた地点で跳水が発生することを示している．

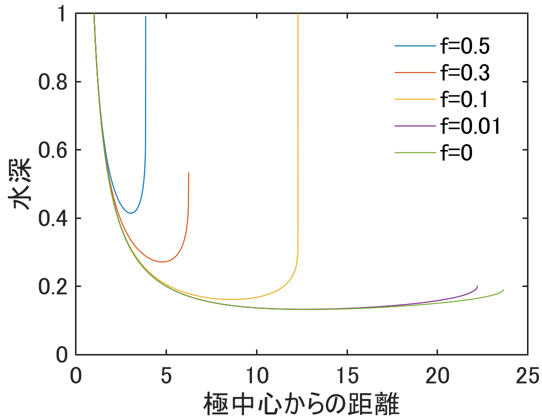

図-4 極中心からの距離に対する水深の変化
（各線の終端は跳水が発生し得る最大半径を示す）

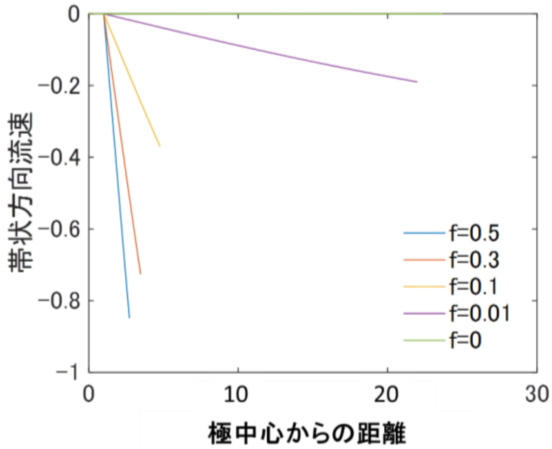

図-5 極中心からの距離に対する帯状方向流速の変化
（各線の終端は跳水が発生し得る最大半径を示す）

図-5 は横軸に極中心からの半径，縦軸に帯状方向の流速をとった図であり，図-4 同様にコリオリパラメータを 0～0．5 まで変化させたときの図である．f=0 のとき，流体は半径方向にのみ流速成分を有するため，帯状方向の流速はなく 0 を示し，また f が大きくなる（回転速度が速くなる）ほど帯状方向の流速は増すことがわかる．このとき各コリオリパラメータにおける流速は，中心からの距離に比例して増大している．コリオリ力によって半径方向だけでなく帯状方向の流速が発生することで，半径方向の運動量が減少し，跳水を起こし得る中心からの距離が小さくなったと考えられる．

3. 非回転条件において底面摩擦の影響を考慮した円形跳水現象の定式化

本章では，回転の効果を考慮することで生じる遠心力，コリオリ力に加え，底面摩擦力の効果が水深に表れる影響を考慮した円形跳水現象の定式化を行う．

3.1 支配方程式と無次元化

ここで浅水流方程式を用いた円形跳水現象の定式化を行うが，Bohr et al.(1993)で流体は非粘性であると考慮する場合は正確な円形跳水の発生位置を計算することができない[14]と報告している．そのため，本研究では平坦面上を粘性ある流体が流れると考慮し，極座標に鉛直方向も考慮した以下の方程式系で表す．

$$\frac{1}{r}\frac{\partial(\mathrm{ruu})}{\partial \mathrm{r}}+\frac{1}{\mathrm{r}}\frac{\partial(\mathrm{uv})}{\partial\theta}+\frac{\partial(uw)}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \mathrm{p}}{\partial \mathrm{r}}-\frac{\tau_{\mathrm{br}}}{\rho \mathrm{h}}+\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \mathrm{r}^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} -\frac{u}{r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial v}{\partial\theta}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \tag{11}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial(\mathrm{ruv})}{\partial \mathrm{r}}+\frac{1}{r}\frac{\partial(\mathrm{vv})}{\partial\theta}+\frac{\partial(vw)}{\partial z} = -\frac{1}{\rho r}\frac{\partial \mathrm{p}}{\partial\theta}-\frac{\tau_{b\theta}}{\rho h}+\nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} +\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}-\frac{v}{r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial\theta^2}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial u}{\partial\theta} +\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) \tag{12}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial(\mathrm{ruw})}{\partial \mathrm{r}}+\frac{1}{r}\frac{\partial(\mathrm{vw})}{\partial\theta}+\frac{\partial(ww)}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \mathrm{p}}{\partial z}+\nu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} +\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) \tag{13}$$

$$\frac{1}{\mathrm{r}}\frac{\partial}{\partial \mathrm{r}}(\mathrm{ru})+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}(\mathrm{v})+\frac{\partial}{\partial z}(w)=0 \tag{14}$$

ここで r， θ，z 方向それぞれの流速を u，v，w，f はコリオリパラメータ，ρは流体の密度，τ_{br}，$\tau_{b\theta}$は r，θ方向それぞれの底面せん断力，ν は動粘性係数，底面せんだん力は底面摩擦係数$\mathrm{C_f}$を用いて式(15)のように表せる．

$$\left(\tau_{\mathrm{br}},\ \tau_{\mathrm{b}_\theta}\right)=\rho C_f u\sqrt{u^2+v^2}(u,v) \tag{15}$$

次に無次元化を行うための準備を行う．下記の式(16)を用い，図-3 で各パラメータの定義を図示した．

$$\mathrm{u}=\mathrm{u_0}\tilde{u}\,,\quad v=u_0\tilde{v}\,,\quad w=u_0\tilde{w}\,,\quad h=h_0\tilde{h}\,,\quad z=\mathrm{h_0}\tilde{z}\,,\quad r=\mathrm{r_0}\tilde{r}, Fr=\frac{u_0}{\sqrt{gh_0}},\quad Re=\frac{u_0 r_0}{\nu},\quad \frac{r_0}{h_0}=l_0 \tag{16}$$

$\mathrm{r_0}$ は極からの距離 $\mathrm{r=r_0}$，$\mathrm{u_0}$は $\mathrm{r=r_0}$ における半径方向への流速，$\mathrm{h_0}$は $\mathrm{r=r_0}$における水深の高さを示す．さらに静水圧を仮定し，p=ρg(h − z)とした．また，これらの値を用いてフルード数，レイノルズ数をそれぞれ式(16)のように定義する．

$$\frac{1}{r}\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{r}}+l_0 w\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{1}{Fr^2}\frac{\partial(\mathrm{h}-\mathrm{z})}{\partial \mathrm{r}}-\mathrm{l_0}\frac{\mathrm{C_f u}\sqrt{u^2+v^2}}{\mathrm{h}}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(l_0^2\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \tag{17}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \mathrm{r}}(\mathrm{ru})+l_0\frac{\partial}{\partial z}(w)=0 \tag{18}$$

式(15)，(16)で用意したパラメータを用いて式(11)-(14)を無次元化すると，式(17)，(18)を得ることができる．このときθ方向は軸対称であると考え，θ微分とθ方向の運動方程式は無視した．また静水圧仮定をしたことから z 方向の運動方程式も無視しており，式(17)は無次元化した r 方向の運動方程式，式(18)は無次元化した連続式を示している．

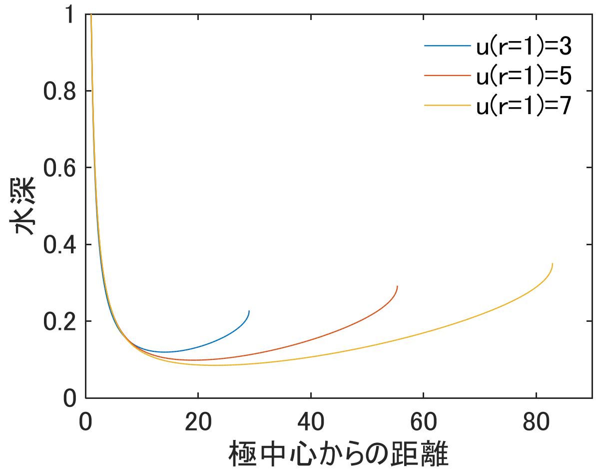

図-6 極中心からの距離に対する水深の変化
（各線の終端は跳水が発生し得る最大半径を示す）

3.2 Integral method を用いた積分

式(8)，(9)から水深を求めるために Pohlhausen method を用いて境界層の流速分布を仮定し，底面から水面までの積分を行う．r 方向の流速分布は $u=a+bz+cz^2$ となると仮定し，①z=0 における流速は 0，②水面(z=h)におけるせん断は発生しない，③流量保存則，の境界条件を与え，

$$\mathrm{u}=\frac{3\mathrm{Q}}{2\pi \mathrm{rh}^2}z-\frac{3Q}{4\pi rh^3}z^2 \tag{19}$$

を得ることができる．式(19)を用いて式(17)，(18)を底面から水面まで積分し、整理すると式(20)を得る．

$$\frac{\mathrm{dh}}{\mathrm{dr}}=\frac{\frac{l_0^2}{Re}\frac{5\pi r}{3Q}-\frac{h}{r}+\mathrm{l_0}C_f\frac{r}{3Q}\sqrt{\frac{9Q^2}{h^2r^2}+16\pi^2r^2\omega^2}}{1-\frac{10\pi^2r^2h^2}{3Q^2Fr^2}} \tag{20}$$

3.3 結果と考察

下記の初期条件を用い，式(20)を Runge-Kutta Gill 法を用い，数値積分し図-6 を作成した．

$$u_0(r=1)=3,\ \ 5,\ 7\,,\quad v_0(r=1)=0,\ \ h(r=1)=1,\quad \nu=1.0\times10^{-3} \tag{21}$$

ここで r =1 における初期 r 方向流速を変化させた．図-6 に示すように初期 r 方向流速が大きいほど，円形跳水が発生し得る最大半径も極中心から遠くなることがわかる．これは初期流速を増加させることで r 方向の運動量が増加し，射流から常流への遷移過程である跳水が極中心からより遠くで発生していることに起因している．

4. 粘性の有無による浅水流方程式の解の比較

本章では，2，3 章において導出した粘性の有無の違いによる浅水流方程式の解の比較を行う．2 章においては，

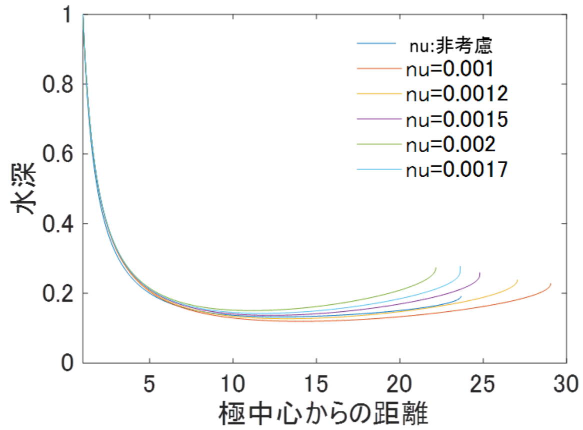

図-7 極中心からの距離に対する水深の変化
nu は動粘性係数を示す
（各線の終端は跳水が発生し得る最大半径を示す）

回転場内における現象を取り扱ったが，3 章では非回転条件を考慮したため，非回転条件における円形跳水現象に対して議論を進めていく．図-7 に非回転条件において式(9)，(10)，(20)に下記の初期条件を用いて Runge Kutta Gill 法により数値積分した結果を記す．

$$u_0(r=1)=3\ v_0(r=1)=0,\quad h(r=1)=1, \tag{22}$$

図-7 内の青線で示すものが 2 章において導出した式(9), (10)を用いたもの，それ以外の線が 3 章において導出した式(20)を用いたものである．水面形を見ると，2 章で導出した非粘性を考慮したモデルと 3 章で導出した nu=0.0012 が同様な水面形を描いているように見える．一方，跳水の発生位置を見ると，nu=0.0017 の時と同様な跳水発生位置を示しているように見える．

5. まとめ

本研究は底面を地形と捉え，既往研究ではほとんど行われていない「円形跳水現象」に底面摩擦力の影響を考慮し，底面摩擦力を加味した円形跳水現象の定式化を行った．非粘性を考慮した式(9),(10)においては回転数を増加させると跳水の発生位置が小さくなること，回転数を増加させると帯状方向の流速は中心からの距離に比例して増加していくことという結果を得た．また式(20)から，流下する流量を増加させると跳水が発生する半径が大きくなること，という結果を得た．

今後は, 3 章において導出した式(20)の中に回転の効果による遠心力, コリオリ力の項も入れたいと考えている．さらに実験を行い，今回定式化した式(9),(10),(20)によって描かれた水面形，跳水発生位置の妥当性について検証していきたい．

参考文献

1) Brechet, Y. and Z. Neda, (1999), On the circular hydraulic jump. Am J Phys 67, 723-731
2) Kevin R. Knupp, (2005), Observational analysis of a gust front to bore to solitary wave transition within an evolving nocturnal boundary layer, Journal of the atmospheric sciences63, 2016-2035
3) 小林文明, (1996), ガストフロントに伴って形成されたアーク状の雲, 天気 43.11, 3-4
4) Rayleigh, (1908), Note on tidal bores, Proc. R. Soc. Lond. A 81, 448-449
5) Ozar, B., Cetegen, B. M., and Faghri, A., 2003, (2003), Experiments on the flow of a thin liquid film over a horizontal stationary and rotating disku surface, Exp. Fluids 34, 556-565
6) Ozar. B, B.M. Cetegen and A. Faghri, (2004), Experiments on heat transfer in a thin liquid film flowing over a rotating disk, ASME j. heat transfer 126, 184-192
7) Kate, R. P., P.K.Das, Suman Chakraborty, (2008), An investigation on no-circular hydraulic jumps formed due to obliquely impinging circular liquid jets, Experimental themal and fluid science 32, 1429-1439
8) Basu, S., and Cetegen, B. M., (2006), Analysis of hydrodynamics and heat transfer in a thin liquid film flowing over a rotating disk by integral method, ASME J. Heat transfer 128, 1-9
9) Basu, S., and Cetegen, B. M, (2007), Effect of hydraulic jump on hydrodynamics and heat transfer in a thin liquid film flowing over a rotating disk analyzed by integral method, ASME J. Heat transfer 129, 657-663
10) Leshev, I., G. Peev, (2003), Film flow on a horizontal rotating disk, Chemical engineering and processing 42, 925-929
11) Zhao, Y. Y., Dowson, M.H Jacobs and A. L., Johnson, T. P. (1999), Liquid flow on a rotating disk prior to centrifugal atomization and spray deposition, Metallurgical and materials transactions B 29B, 1357-1369
12) Zhao, Y. Y., Dowson, A. L., Johnson, T. P. and Jacobs. M.H., (2000), Modeling of liquid flow after a hydraulic jump on a rotating disk prior to centrifugal atomization, Modelling simul. Master. Sci. Eng.8, 55-65
13) Watson. E. J, (1964),The radial spread of a liquid jet over a horizontal plane, J.Fluid mech20, part3, 481-499
14) Bohr, T., Dimon, P., Putkaradze, V., (1993), Shallow –water approach to the circular hydraulic jump, J Fluid Mech. 254, 635-648
15) Dasgupta, R., Govindarajan, R., (2011), The hydraulic jump and the shallow-water equations, Int J Adv Eng Sci Appl Math 3(1-4), 126-130
16) Arakeri, J. H. and K.P. Achuth Rao, (1996), On radial film flow on a horizontal surface and the circular hydraulic jump, J. Indian inst. Sci 76, 73-91
17) Duchesne, A. L. Lebon and L. Limat, Constant Froude number in a circular hydraulic jump and its implication on the jump radius selection, Europhys..Letter. 107, 54002