

水文確率値算定の評価基準の研究

A Study on Evaluation Criterion of Hydrological Probability Value

北海学園大学工学部社会環境工学科 ○学生員 土屋勇樹(yuuki Tutiya)
 北海学園大学工学部社会環境工学科 学生員 武藤修平(syuuhei mutou)
 北海学園大学工学部社会環境工学科 フェロー 許士達広 (tatuhiro syosi)

1. まえがき

河川計画に用いられる水文確率値の算定について、1900年代後半から多くの研究が行われたが、近年には下火となっている。理由の1つには極値統計について一定の理論的整理がなされたこと、2つ目には降雨データの蓄積が進み、短期間のデータから長期の再現機関の確率値を推定する必要性が減少すると見られていること、3つめにはコンピュータの発達により、気象モデルによる物理的解析や、観測のビッグデータの処理に力点が移っていることがある。

しかし現実にはどのような確率モデルが良いか、その算定方法はどの方式が良いか、それを何で評価するかについては、依然として明確な答えは得られていない状況にある。2つ目の問題についてはデータ数が確率年数より多くければ内挿して確率値求めることになるが、その方法については議論があり、決定的な方法が見いだせていない。3つめについては気象モデルから降雨を発生させても、現実には生じた事象

以上の信頼性を持つことは難しく、さらにその場合でもやはり確率的理論が必要となる。

極値統計自体は経済や他の工学分野での利用が広まっており、研究の必要性はむしろ高まっている。本研究では水文確率の最適値の算定に重要な根本的問題、何をもって最適とするかの判断基準について考察する。

2. 適合性と変動性

水文確率モデルの評価指標は適合度を示すものと変動性を示すものに大別される。適合度はモデルに使用したデータとデータの位置の推定値の差を見るものであり、指標として誤差 se^2 、決定係数、SLSC、AIC などが用いられている。

変動性は観測データが変化したり追加されたりしたときの推定値の変動する度合いを見るもので、モデルとなる関数ごとに積率法や最尤法による推定誤差分散の式が導出されている。またジャックナイフ法やブートストラップ法といったリサンプリング法によって推定誤差分散を求めることができる。

適合度は従来用いられてきた一般的な指標であり、理解されやすい。一方変動性は、実際の行政などにおいて水文量が追加されても計画値が大きく変動しないことが好ましいことから、考慮されるものである。しかしこの両者は一般的に両立しない。データへの適合度が高いモデルはデータの変動に追従して変化し、変動が大きくなるためである。

プロットングポジションを用いてデータを縦軸に、非超過確率による標準変量 ε を横軸にとった時、確率モデルの関数は平面に描くことができる。このため問題を回帰の線に置き換え、図-1はデータに直線と指数関数を当てはめた場合を示す。

図の2つの関数の線の適合度として決定係数を取ると、指数の値の方がやや小さく、適合性で判断すると指数が良いということになる。しかしジャックナイフ法による $x=15$ の推定値の誤差分散は、指数による推定値の方がかなり大きい。横軸 ε_p における指数の推定値 y_p は大きく上昇し、人間の目で見た感じでも指数による推定値が妥当とは思わないであろう。このようにデータのある区間における適合度が高いモデルが、良い推定値を与えるとは限らない。従来の外挿では一般的にデータに適合した関数を算定して、推定値はその延長上にあるとするが、それが必ずしも正しいとは言えないのである。

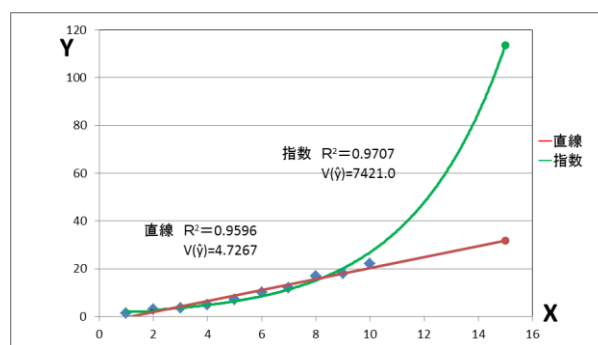


図-1 直線と指数関数

一方変動量の指標のみでもモデルの良し悪しは判断できない。変動性の指標は推定値に関係なくモデル関数の性質により変化するため、これによって推定値の精度を考えることができない。

3. 予測誤差

プロットングポジションを用いて、平面上に描かれた散布図に最小二乗法による回帰式を当てはめれば、確率値を求めることができる。確率モデルの問題はある程度回帰の問題に置き換えて考えることができる。

回帰式においては予測誤差の概念があり回帰推定の評価は予測誤差で表される。式の1項目が残差分散で適合度、2、3項目は残差による変動を表す。

$$S_T^2 = V(y - \hat{y}) = \left[1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{S_{xx}} \right] s_e^2 \cdots (1)$$

ただし、 S_{xx} : 偏差平方和 s_e^2 : 残差の分散

n : データ数

データのある点の予測誤差を全点で平均すると、以下に示すように赤池により提唱された最終予測誤差と同じものが算出される(式2)。この対数尤度を取るとAICと同じものが得られる(式5)。つまり予測誤差分散とAICは等価なものであり、点のAICが予測誤差である。

$$\begin{aligned} \overline{S_T^2} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left[1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_i - \bar{x})^2}{S_{xx}} \right] s_e^2 = \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \right) s_e^2 \\ &= \frac{n+2}{n} * \frac{S_e}{n-2} = \frac{1}{n} * \frac{n+2}{n-2} S_e \\ &\cdots (2) \end{aligned}$$

S_e は残差平方和、 S_{xx} は偏差平方和である。同様に多変量で重回帰式

$$\hat{y}_i = a_0 + a_1 x_{1i} + a_2 x_{2i} + \cdots + a_n x_{ni} \cdots (3)$$

に対し、ここでは簡単に説明変数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ が独立の場合を示すと、各点の予測信頼分散 S_{Ti}^2 およびその平均 S_T^2 は以下ようになる。

$$\begin{aligned} S_{Ti}^2 &= \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_{1i} - \bar{x}_1)^2}{S_{x1x1}} + \frac{(x_{2i} - \bar{x}_2)^2}{S_{x2x2}} + \cdots + \frac{(x_{pi} - \bar{x}_p)^2}{S_{xpxp}} \right) s_e^2 \\ \overline{S_T^2} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n S_{Ti}^2 \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left[1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_{1i} - \bar{x}_1)^2}{S_{x1x1}} + \frac{(x_{2i} - \bar{x}_2)^2}{S_{x2x2}} + \cdots + \frac{(x_{pi} - \bar{x}_p)^2}{S_{xpxp}} \right] s_e^2 \\ &= \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{p}{n} \right) s_e^2 = \frac{n+p+1}{n} * \frac{S_e}{n-p-1} \\ &= \frac{1}{n} * \frac{n+p+1}{n-p-1} S_e = \frac{n+p+1}{n-p-1} s_e^2 \\ &\cdots (4) \end{aligned}$$

σ^2 は標本の誤差分散で、 $\sigma^2 = S_e/n$

p は説明変数の数を表し、定数項を加えた $p+1$ がパラメータ数で、(4)式は(2)式で $p=1$ の場合である。(4)はAkaike(1969, 1970)によるFPE(最終予測誤差)と同じであり、説明変数が独立でない一般の場合でも成立する。最終予測誤差の対数尤度を取って n 倍すると、AICと同じものが求められる。

$$L = n \log S_e^2 + n \log \left(\frac{n+p+1}{n-p-1} \right)$$

$$n \log \left(\frac{n+p+1}{n-p-1} \right) = n \log \left(1 + \frac{2p+2}{n+p+1} \right)$$

$$\cong n \frac{2(p-1)}{n+p+1} \cong 2K (K = p+1)$$

$$L = \log S_e^2 + 2K$$

4. 評価指標の提案

以上のことから予測誤差分散に相当するものが適合度と変動性を合わせた評価指標として有効と考えられる。横軸がデータではなく標準変量であったとき、推定値は回帰式で求まるが、誤差変動は大きく異なる。例えばジャックナイフ法で考えるとデータの一つをとると、縦横の YX ともにデーター値の場合はそこが空白となるが、横軸が標準変量であれば横方向に残ったデーターの位置がずれ、変動が大きくなる。

予測誤差分散の変動を表す項は点の理論誤差分散(信頼区間を示す分散)において、残差分散を用いたものが考えられる。例えばグンベル分布の理論分散は式(6)であるが、この σ^2 を残差分散 se^2 に変えるのである。

$$\begin{aligned} Var(\hat{X}_p) &= \frac{\sigma^2}{N} \left\{ 1 + 1.1396(s_p - \gamma) \frac{\sqrt{6}}{\pi} + 1.1(s_p - \gamma)^2 \frac{6}{\pi^2} \right\} \\ &\cdots (6) \end{aligned}$$

σ^2 : 変量 X の母分散 N : データ数

S_p : 標準変量 γ : オイラー定数

しかしグンベル分布以外の理論誤差式はかなり複雑で計算が大変である。また式で与えられるのはデータがその分布に完全に一致している場合の値であり、かつ算出方法によって異なる。(6)式は積率法で求めたものであり、最尤法では別の式になる。

必要なことは各種の確率分布と算定方法で算出される評価法を適合度と変動性の両方を考えた指標で算出することである。ここでは、ジャックナイフ誤差分散を理論分散に対応するものとし、 se^2/σ^2 倍したものを変動部分の誤差とした。これによりモデルの関数と算出法が違うものを、統一した手法で評価することができる。

表-1は岩見沢観測所についてグンベル法と一般化極値分布について、最小二乗法で母数を算定し各評価指標を算出したものである。適合性を表す指標では一般化極値分布が良く、変動性を表す指標ではグンベル分布が良い。両方を合わせた予測誤差では、一般化極値分布が良くなっている。

表-1 評価指標の比較

分布	グンベル	一般化極値
確率値	225.666	299.656
SLSC	0.073	0.030
AIC	232.964	179.765
R^2	0.882	0.970
ジャックナイフ	1741.847	3533.989
予測誤差	539.472	180.182

おわりに

適合度と変動性を合わせた指標として予測誤差分散を利用した指標を提案した。今後データを加えてさらに検討する。