厚肉二重曲率シェルにおけるひずみ近似の影響

Effect of approximate treatment of strain-displacement relations in doubly curved thick shells

函館工業高等専門学校　正　　員　渡辺　力 (Chikara WATANABE)
函館工業高等専門学校　学生会員　荒川尚輝 (Naoki ARAKAWA)
函館工業高等専門学校　学生会員　小林賢弥 (Kenya KOBAYASHI)
函館工業高等専門学校　学生会員　成田　寛 (Kan NARITA)

1.　まえがき

シェル理論ではひずみ–変位関係式と合応力を近似的に取扱うことから，その近似方法に応じて種々の理論が存在する．古くは，Love の一次近似理論や Flügge の二次近似理論がその代表的なものである．これらは，ひずみ–変位関係式に現れる $1/(1+\zeta/R_i)$ の項（ζ は法線方向の座標，R_i は主曲率半径）について，Tayler 展開した第 1 項までを用いている場合を一次近似，第 3 項までを用いる場合を二次近似と呼んでおり，一般に，一次近似理論は偏平シェルに，二次近似理論は曲率の大きな深いシェルに適用されている[1)]．

一方，Love の一次近似理論ではシェル中央面に対する法線まわりのモーメントのつり合い条件を満足しないことから，Reddy[2)] は Sanders の方法を用いて剛体変位が完全に除去されるひずみ–変位関係式を誘導している．それに対して，著者は，ひずみの $1/(1+\zeta/R_i)$ の項と合応力に現れるそれらの積分項を正確に取扱っており，これらを正確に取扱うことによって，中央面に対する法線まわりのモーメントのつり合い条件が恒等的に満足され，Sanders の方法によりひずみを修正する必要が無いことを明らかにしている[3)]．

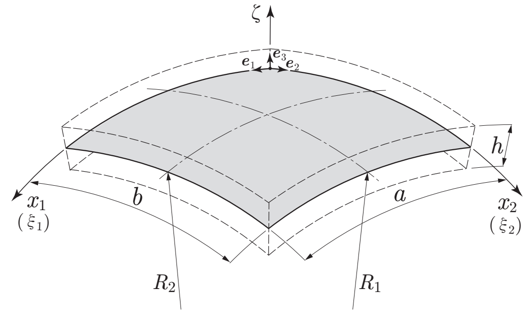
本研究は，深い厚肉シェルの精密な構造解析のために，ひずみ–変位関係式と合応力の取扱いについての統一的な見解を示すことを目的としている．本報告は，文献 3) の数値計算例を補足するものであり，円筒曲面板の数値計算例により，一次近似や二次近似によるひずみ–変位関係式と合応力の取扱いが，変位と応力，固有振動数に与える影響を調べた結果を報告する．

2.　ひずみ–変位関係式と合応力の取扱い

(1)　ひずみ成分

シェルの幾何形状を図–1 に示す．シェルの中央面に直交曲線座標 (x_1, x_2, ζ) を設け，シェル厚を h，x_1, x_2 軸に沿ったシェル幅を a, b，シェル中央面の主曲率半径を R_1, R_2 とする．

一次せん断変形理論に基づき，シェルの任意点の変



図–1　二重曲率を有する厚肉シェル

位 $\overline{u}_1, \overline{u}_2, \overline{u}_3$ は，中央面の座標軸 x_1, x_2, ζ 方向の変位 u_1, u_2, u_3 と，x_1, x_2 軸まわりの回転変位 ϕ_2, ϕ_1 を用いて次式で与えられる．

$$\overline{u}_1 = u_1 + \zeta\,\phi_1, \quad \overline{u}_2 = u_2 + \zeta\,\phi_2, \quad \overline{u}_3 = u_3 \qquad (1)$$

直交曲線座標系におけるひずみ–変位関係式に式 (1) と Gauss-Codazzi の条件式を用いて，二重曲率シェルのひずみ–変位関係式が得られる．

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{11} &= \frac{1}{(1+\zeta/R_1)}\left\{\varepsilon_1^0 + \zeta\kappa_1\right\}\\
\varepsilon_{22} &= \frac{1}{(1+\zeta/R_2)}\left\{\varepsilon_2^0 + \zeta\kappa_2\right\}\\
\gamma_{12} &= \frac{1}{(1+\zeta/R_1)}\left\{\varepsilon_{12}^0 + \zeta\kappa_{12}\right\}\\
&\qquad + \frac{1}{(1+\zeta/R_2)}\left\{\varepsilon_{21}^0 + \zeta\kappa_{21}\right\}\\
\gamma_{23} &= \frac{1}{(1+\zeta/R_2)}\,\gamma_{23}^0, \quad \gamma_{13} = \frac{1}{(1+\zeta/R_1)}\,\gamma_{13}^0 \qquad (2)
\end{aligned}$$

(2)　ひずみ–変位関係式の取扱い

式 (2) の $1/(1+\zeta/R_i)$ の項については，近似的に取扱われる場合が多い．偏平シェル理論においては，$\zeta/R_i \ll 1$ として次式が用いられる．

$$\frac{1}{(1+\zeta/R_i)} \approx 1 \qquad (3)$$

一方，深いシェルを取扱う場合には，Tayler 展開した 2 次項まで（3 項まで）を用いて次式が用いられている．

$$\frac{1}{(1+\zeta/R_i)} \approx 1 - \frac{\zeta}{R_i} + \left(\frac{\zeta}{R_i}\right)^2 \qquad (4)$$

本研究では，ひずみを式 (3) で取扱う場合を一次近似，式 (4) の場合を二次近似と呼ぶ．それに対して，渡辺ら[1),3)] は，$1/(1+\zeta/R_i)$ の項を正確に取扱っている．

(3)　ひずみ–変位関係式の修正

ひずみ–変位関係式を式 (3), (4) で近似する場合には，法線 ζ まわりのつり合い条件式

$$M_{21}/R_2 - M_{12}/R_1 + N_{21} - N_{12} = 0 \qquad (5)$$

を満足しない．そのため，Reddy[2] は Sanders の手法を用いてひずみ成分を修正している．この修正により，式 (2) の $\varepsilon^0_{12}, \varepsilon^0_{21}, \kappa_{12}, \kappa_{21}$ が次のように修正される．

$$\begin{aligned}
\varepsilon^0_{12} &= \frac{1}{2\alpha_1\alpha_2}\left\{\alpha_1\frac{\partial u_1}{\partial \xi_2}+\alpha_2\frac{\partial u_2}{\partial \xi_1}-\left(u_1\frac{\partial \alpha_1}{\partial \xi_2}+u_2\frac{\partial \alpha_2}{\partial \xi_1}\right)\right\} \\
&= \varepsilon^0_{21} \\
\kappa_{12} &= \frac{1}{\alpha_1}\left(\frac{\partial \phi_2}{\partial \xi_1}-\frac{1}{\alpha_2}\frac{\partial \alpha_1}{\partial \xi_2}\phi_1\right) \\
&\quad -\frac{1}{2\alpha_1\alpha_2 R_1}\left\{\alpha_2\frac{\partial u_2}{\partial \xi_1}+u_2\frac{\partial \alpha_2}{\partial \xi_1}-\alpha_1\frac{\partial u_1}{\partial \xi_2}-u_1\frac{\partial \alpha_1}{\partial \xi_2}\right\} \\
\kappa_{21} &= \frac{1}{\alpha_2}\left(\frac{\partial \phi_1}{\partial \xi_2}-\frac{1}{\alpha_1}\frac{\partial \alpha_2}{\partial \xi_1}\phi_2\right) \\
&\quad +\frac{1}{2\alpha_1\alpha_2 R_2}\left\{\alpha_2\frac{\partial u_2}{\partial \xi_1}+u_2\frac{\partial \alpha_2}{\partial \xi_1}-\alpha_1\frac{\partial u_1}{\partial \xi_2}-u_1\frac{\partial \alpha_1}{\partial \xi_2}\right\} \qquad (6)
\end{aligned}$$

(4)　合応力の取扱い

合応力の定義式

$$\begin{Bmatrix} N_{11} \\ N_{22} \\ N_{12} \\ N_{21} \\ M_{11} \\ M_{22} \\ M_{12} \\ M_{21} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_{11}(1+\zeta/R_2) \\ \sigma_{22}(1+\zeta/R_1) \\ \tau_{12}(1+\zeta/R_2) \\ \tau_{12}(1+\zeta/R_1) \\ \zeta\sigma_{11}(1+\zeta/R_2) \\ \zeta\sigma_{22}(1+\zeta/R_1) \\ \zeta\tau_{12}(1+\zeta/R_2) \\ \zeta\tau_{12}(1+\zeta/R_1) \end{Bmatrix} d\zeta \qquad (7)$$

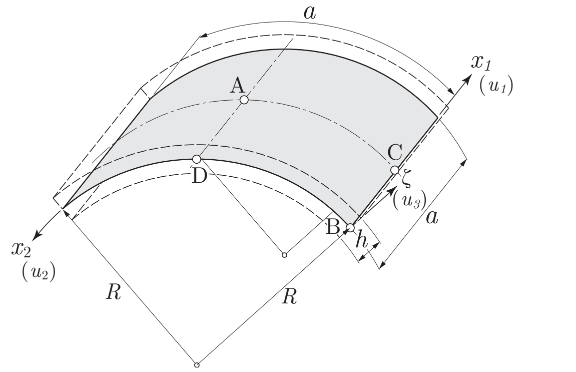
$$\begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \tau_{13}(1+\zeta/R_2) \\ \tau_{23}(1+\zeta/R_1) \end{Bmatrix} d\zeta \qquad (8)$$

に，応力と式 (2) のひずみを代入して合応力を求める．

式 (2) の $1/(1+\zeta/R_i)$ の取扱いに応じて，式 (3) の一次近似，式 (4) の二次近似，厳密に取扱った場合の合応力を次のように表す．

$$\begin{Bmatrix} N_{11} \\ N_{22} \\ N_{12} \\ N_{21} \\ M_{11} \\ M_{22} \\ M_{12} \\ M_{21} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 & B_{11} & 0 & 0 & 0 \\ & A_{22} & 0 & 0 & 0 & B_{22} & 0 & 0 \\ & & A_{33} & A_{34} & 0 & 0 & B_{33} & 0 \\ & & & A_{44} & 0 & 0 & 0 & B_{44} \\ & & & & D_{11} & D_{12} & 0 & 0 \\ & & & & & D_{22} & 0 & 0 \\ & \text{sym.} & & & & & D_{33} & D_{34} \\ & & & & & & & D_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon^0_1 \\ \varepsilon^0_2 \\ \varepsilon^0_{12} \\ \varepsilon^0_{21} \\ \kappa_1 \\ \kappa_2 \\ \kappa_{12} \\ \kappa_{21} \end{Bmatrix} \qquad (9)$$

$$\begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & 0 \\ 0 & C_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma^0_{13} \\ \gamma^0_{23} \end{Bmatrix} \qquad (10)$$



図–2　周辺単純支持円筒曲面板

(5)　法線まわりのつり合い条件

式 (5) のつり合い条件式に式 (9) の合応力を代入して，次式が得られる．

$$\begin{aligned}
& (A_{34}-A_{33}-B_{33}/R_1)\,\varepsilon^0_{12} \\
+\ & (A_{44}-A_{34}-B_{44}/R_2)\,\varepsilon^0_{21} \\
+\ & (-B_{33}+D_{34}/R_2-D_{33}/R_1)\,\kappa_{12} \\
+\ & (B_{44}+D_{44}/R_2-D_{34}/R_1)\,\kappa_{21} = 0 \qquad (11)
\end{aligned}$$

式 (11) の各ひずみ成分の係数がゼロになる条件から，式 (3) の一次近似と式 (4) の二次近似を用いる場合には，$R_1{=}R_2$ となる球形シェルの場合を除いて，式 (11) は満足されない．それに対して，式 (2) の $1/(1+\zeta/R_i)$ の項を厳密に取扱い，合応力に厳密積分を用いる場合には式 (11) の条件を満足しており，恒等的に式 (5) のつり合い条件が満足される．また，厳密積分を用いた場合には，ひずみ修正の有無にかかわらず解は一致する．

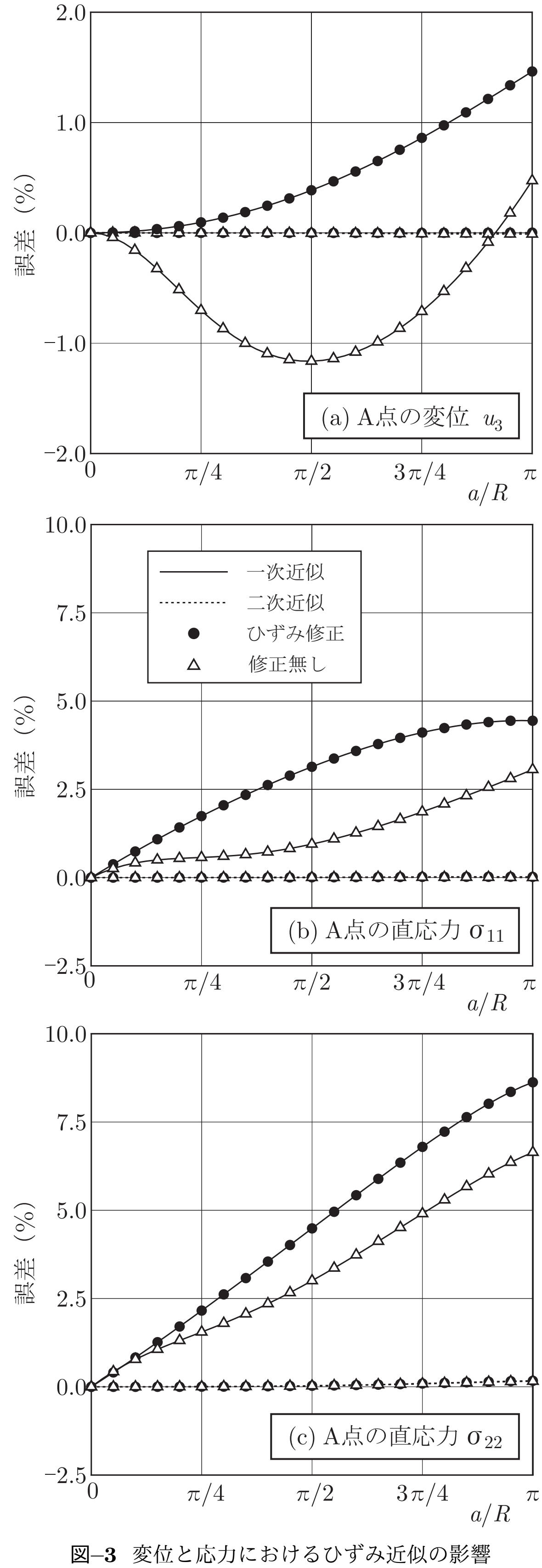
3.　数値計算例

図–2 に示す周辺を単純支持された中等厚の円筒曲面板の曲げ解析と自由振動解析を行って，一次近似や二次近似による取扱いが，変位と応力，固有振動数に与える影響を調べる．級数解法による円筒曲面板の定式化については，紙面の都合により省略する．

計算モデルは，x_1 軸に沿った主曲率半径 $R_1{=}\infty$ とする円筒曲面板で，x_1, x_2 軸に沿ったシェル幅を a，曲率半径を $R_2{=}R$，厚さを h として，板厚比 $h/a{=}1/10$，ポアソン比は $\nu{=}0.3$ を用いる．曲げ解析では，法線方向の等分布荷重 q を満載し，せん断補正係数は $k{=}5/6$ とする．自由振動解析では，固有円振動数を p とし，$k{=}\pi^2/12$ を用いる．

(1)　変位と応力に与える影響

図–3 は，曲率パラメータ a/R を $0\sim\pi$ まで変化させたときの曲面板中央点 (A 点) のたわみ u_3，A 点上縁の垂直応力 σ_{11} と σ_{22} の厳密積分による計算値に対する誤差（%）を示したもので，一次近似による計算値

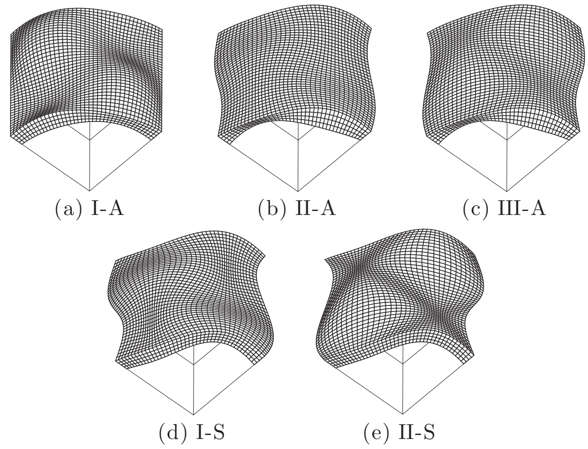


図–3　変位と応力におけるひずみ近似の影響

を実線で，二次近似による計算値を点線で，式 (6) のひずみ修正を行う場合を●印で，ひずみ修正を行わない場合を△印で示している．

図より，一次近似を用いる場合には，曲率パラメータ a/R が大きくなると，ひずみ近似による誤差が大きなる．一次近似において，ひずみ修正を行わない解は Love の一次近似理論，ひずみ修正を行う場合の解は Reddy の偏平シェル理論の解[2]と一致する．図 (b),(c) の垂直応力 σ_{11},σ_{22} では，ひずみ修正を行った場合の誤差は，ひずみ修正を行わない Love の一次近似理論に比べて大きなっている．さらに，σ_{11} に比べ，曲率を有する方向の応力 σ_{22} の方が誤差が大きくなっている．

それに対して，二次近似（図の点線）では，曲率が大きくなってもひずみ近似による誤差は小さく，$a/R=\pi$ でも誤差は 1%以下となっている．



図–4　固有振動モード（m=2, n=2）

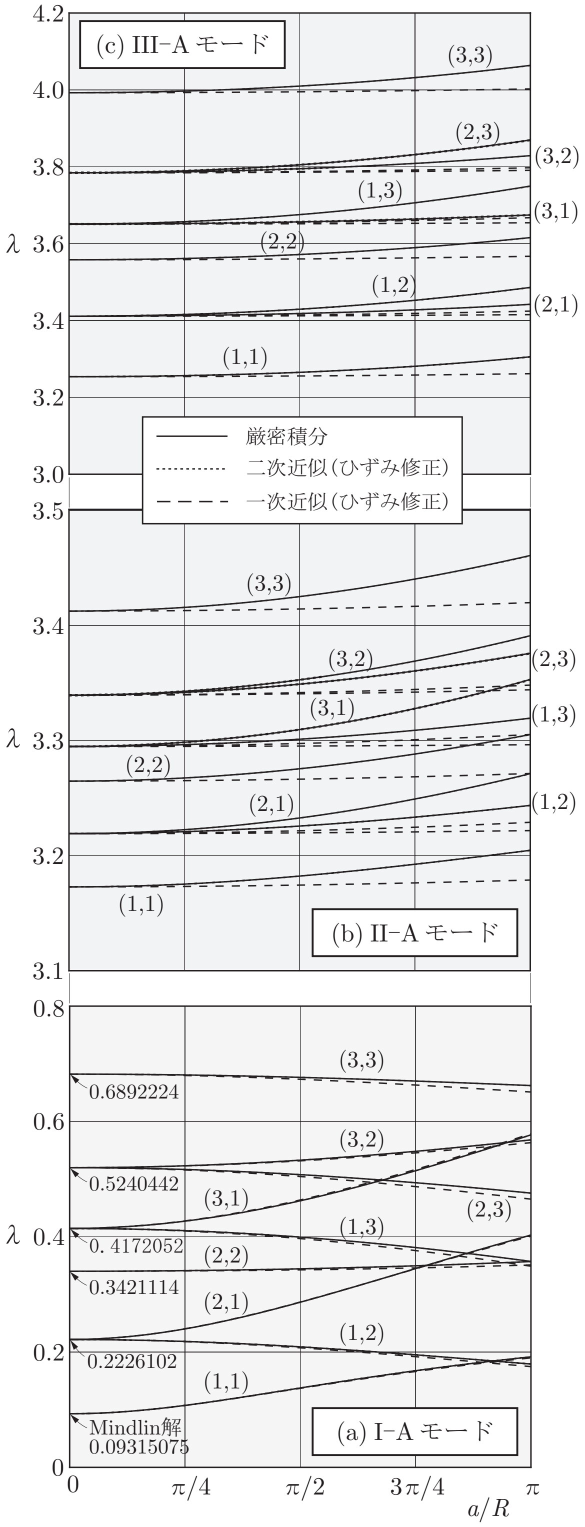
(2)　固有振動数に与える影響

周辺を単純支持された曲面板では，一次せん断変形理論に基づく周辺単純支持長方形板と同様の 5 つの固有振動モード（曲げ振動モード I–A, II–A, III–A，伸縮振動モード I–S, II–S）に分類できる[4]．一例として，半波長数 m=2, n=2 の固有振動モードを**図–4** に示す．

図–5 と**図–6** は，曲率パラメータ a/R を $0\sim\pi$ まで変化させたときの 5 つの振動モードに対する無次元振動数 $\lambda = p\,h\sqrt{\rho/G}$ を示したもので，半波長数 (m,n) が 1∼3 の波形の結果を示している．実線は厳密積分による計算値を，破線は一次近似（ひずみ修正），点線は二次近似（ひずみ修正）によるものである．

x_1 軸と x_2 軸で非対称である円筒曲面板では，x_1 軸と x_2 軸で半波長数が逆となる (m,n) と (n,m) 波形に対する固有振動数を比較すると，曲率が大きくなるに従ってその違いが大きくなる．曲げ振動 I-A と II-A モードでは，曲率が大きくなると x_2 軸の波数が大きいモードの固有振動数は，x_1 軸の波数が大きいモードに比べ小さくなるが，その他の振動モード（III-A, I-S, II-S）では逆に固有振動数が大きくなっている．

また，一次近似では，どのモードでも波数 m,n が大きくなると曲率の増大とともに誤差が大きくなってい

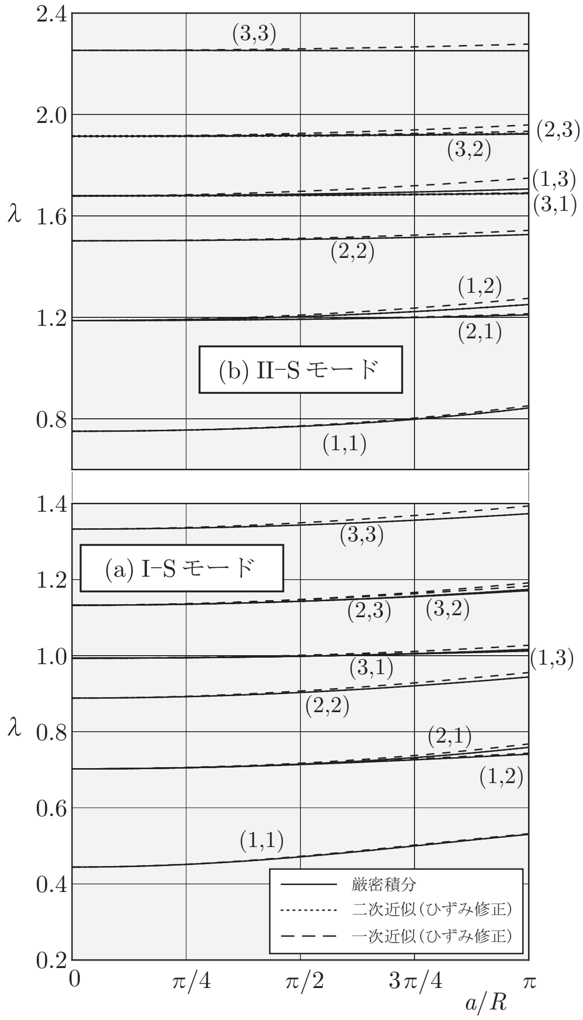


図–5　曲げ振動モードにおけるひずみ近似の影響

るのに対して，二次近似では，波数 m,n が大きくなり，曲率が大きくなっても，厳密解に良く一致している．なお，二次近似では $a/R{=}\pi$ の (3,3) 波形に対してもひずみ近似の誤差は 0.01%以下となっている．

4.　まとめ

本研究は，深い厚肉シェルの精密な構造解析のために，ひずみ–変位関係式と合応力の取扱いについての統一的な見解を示すことを目的に，ひずみ–変位関係式と



図–6　伸縮振動モードにおけるひずみ近似の影響

合応力に現れる $1/(1+\zeta/R_i)$ の項を正確に取扱う方法を提案した．これにより，Sanders の方法によりひずみ–変位関係式の修正を行わなくても，中央面に対する法線まわりのつり合い条件が恒等的に満足される．

ひずみ–変位関係式と合応力を一次近似で取扱う場合には，曲率が大きくなるにつれ，ひずみ近似の影響が大きなる．それに対して，二次近似では曲率の大きな深いシェルに対してもひずみ近似の影響は小さいが，法線まわりのつり合い条件は満足されない．

参考文献

1) 渡辺　力，林　正：一次せん断変形理論に基づいた二重曲率シェルの正確な級数解, 構造工学論文集, Vol.54A, pp.1–10, 2008.
2) Reddy, J.N. : Exact solutions of moderately thick laminated shells, *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, Vol.110, No.5, pp.794–809, 1984.
3) 渡辺　力：厚肉シェルにおけるひずみ-変位関係式と合応力の取扱いに関する一考察, 土木学会論文集 A2, 掲載予定.
4) 渡辺　力，林　正：変位場を規定するハイアラーキソリッド要素による平板の自由振動解析, 構造工学論文集, Vol.59A, pp.1–13, 2013.