

## 相変化潜熱の評価精度向上対策と混合ハイブリッド FEM への適用

Improvement in latent heat evaluation for phase change and application of the method to Mixed Hybrid FEM

北海道大学大学院工学院 ○ 学生会員 大村健祐 (Kensuke Omura)  
 北海道大学工学部環境社会工学科 学生会員 工藤史登 (Fumito Kudo)  
 北海道大学大学院工学研究院 フェロワー 蟹江俊仁 (Shunji Kanie)

## 1. まえがき

今や凍結凍上現象は寒冷地域に限った工学的問題ではない。構造物を安全に建設するために不安定な地盤を一時的かつ人工的に凍らせる地盤凍結工法は、全国の土木工事にて積極的に利用されている。このように人工的に地盤を凍結させる技術の更なる向上が経済性、安全性の両観点から求められる中で、凍結深や凍上量の予測を数値解析から明らかにすることの意義は大きい。

さて、凍結凍上現象の数値解析は熱伝導解析、高志の式による凍上率の算出、力学的解析の3段階からなる。各時間ステップにおいて、まず熱伝導解析により温度を求め、次に高志の式により凍結膨張ひずみを、最後に力学的解析から地盤内応力並びに凍上量を算出するのである。それぞれから得られる解析値は相互に作用し合うため、凍結凍上現象を高い精度で予測するためには、それぞれの段階で実現象に則した解析が必要である。我々は、凍結凍上現象の予測のために、この3方面から様々な試みをしているが、本論文では熱伝導解析に着目する。

本研究における熱伝導解析は、水の相変化を取り扱うため各要素の熱収支及び温度を厳密に評価する必要がある。しかし従来の有限要素法（以下 FEM）による温度解析では、要素を構成する接点に温度及び熱流量が与えられる為、要素境界における熱収支が曖昧であった。そこで要素境界に目的変数を定義することで熱収支の評価に優れ、さらに要素代表温度が得られる混合ハイブリッド FEM（以下 MHF）を導入する。また、水の相変化の際に生じる潜熱の扱いが極めて重要となる。従来、等価比熱法という手法を用いて潜熱を扱ってきたが、これまでの考えでは MHF に、この手法を用いることが困難であった。そのために温度補正法を改良し、時間に関しアダプティブな温度補正法を MHF に導入した。本研究は等価比熱法を導入した MHF による熱伝導解析の検証を行い、凍結膨張解析の精度向上の足掛りとするのが目的である。

## 2. 温度解析

MHF では混合形式からなる支配方程式を離散化する。混合形式で表された熱伝導方程式は式 1、式 2 からなる。

$$\lambda \nabla T = -\vec{q} \quad \text{式 1}$$

$$\nabla \vec{q} = -\rho c \frac{\partial T_k}{\partial t} \quad \text{式 2}$$

ここで  $\lambda$  : 熱伝導係数,  $T$  : 辺上の温度,  $q$  : 熱流量,  $\rho$  : 密度,  $c$  : 比熱,  $T_k$  : 要素代表温度を表す。

一方, FEM では非退化形式で表された熱伝導方程式式 3 を離散化する。

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \nabla^2 T \quad \text{式 3}$$

ここで  $\lambda$  : 熱伝導係数,  $T$  : 点上の温度,  $\rho$  : 密度,  $c$  : 比熱を表す。

## 3. 等価比熱法

温度解析において、潜熱の影響を無視することが出来ない。本来潜熱の影響で温度変化が滞る温度帯の熱容量を変化させることにより、潜熱を考慮した温度変化をさせる手法を等価比熱法という。相変化による潜熱  $L$  を含めた見かけの熱容量  $\overline{\rho c}$  は熱容量  $\rho c$  と潜熱  $L$  を用いて以下の式で表すことが出来る。

$$\int_{T_s}^{T_L} \overline{\rho c} dT = L m_w + \int_{T_s}^{T_L} \rho c dT \quad \text{式 4}$$

よって見かけの熱容量  $\overline{\rho c}$  は次のようになる。

$$\overline{\rho c} = \frac{L m_w}{(T_L - T_s)} + \rho c \quad \text{式 5}$$

ここで,  $T_L, T_s (T_L > T_s)$  はそれぞれ相変化の起こる温度範囲を示している。また、凍上解析の場合,  $m_w$  は単位体積の土中に含む水の質量である。

## 3.1. 等価比熱法を用いた従来までの温度補正

従来、ある点における時刻  $(t)$  の温度  $T_t$  が等価比熱法で仮定した潜熱の領域になく  $(T_t > T_L)$ 、次の計算時刻  $(t + \Delta t)$  で温度が潜熱の領域に入った場合  $(T_L > \bar{T}_{t+\Delta t} > T_s)$ 、 $\bar{T}(t + \Delta t)$  は温度低下が起こり過ぎるため、熱収支のつり合いから次のように温度を修正してきた。

$$\overline{\rho c} (T_L - T_{t+\Delta t}) = \rho c (T_L - \bar{T}_{t+\Delta t}) \quad \text{式 6}$$

すなわち修正後の温度は次の式 7 のように表される。

$$T_{t+\Delta t} = T_L - \frac{\rho c}{\overline{\rho c}} (T_L - \bar{T}_{t+\Delta t}) \quad \text{式 7}$$

上に示したのは、潜熱の領域境界を跨ぐある 1 条件であり、その他の場合も同様に考える。

## 3.2. 問題点

従来までの温度補正法では各点での熱収支しか考慮していない。すなわち、ある点の温度が状態変化する場合、その影響が他の点に影響していないのである。計算精度を高めるためには、ある点の温度が潜熱の領域境界を通過するような場合、同一計算ステップ内であってもその前後で熱容量を変化させてマトリックスを組み替え、計算する必要がある。特に、混合形式の熱伝導方程式を用

いる場合、熱流量と温度とが互いに影響しあうため、後から温度のみを補正すると温度と熱流量の関係が崩れてしまう恐れがある。

3.3. アダプティブ温度補正法とMHFへの適用

ある要素のある時刻での温度 $T_k(t)$ が等価比熱法で仮定した潜熱の領域になく( $T_k(t) > T_L$ )、次の計算時刻( $t + \Delta t$ )で潜熱の境界領域に入った場合( $T_L > \bar{T}_k(t + \Delta t) > T_S$ )を考える。図1のように $\Delta t$ 間では温度変化が一定であると仮定すれば、 $\Delta t$ に対する潜熱の領域に入るまでの時間 $\Delta t_L$ の割合 $\alpha$ を求めることができる。

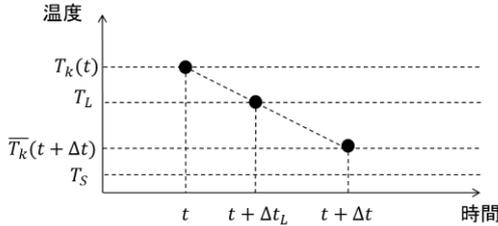


図1  $\alpha$  の考え方

$$\alpha = \frac{\Delta t_L}{\Delta t} = \frac{T_L - T_k(t)}{\bar{T}_k(t + \Delta t) - T_k(t)} \quad \text{式 8}$$

この割合 $\alpha$ を用いて $\Delta t_L$ 秒後の全ての辺の温度 $T(t + \Delta t_L)$ 及び熱流量 $Q(t + \Delta t_L)$ 、要素の温度 $T_k(t + \Delta t_L)$ を以下の式9における $P$ のように求める。

$$P(t + \Delta t_L) = P(t) + \alpha \{P(t + \Delta t) - P(t)\} \quad \text{式 9}$$

ここで、熱容量 $\rho c$ を変化させマトリックスを修正し計算することで、状態変化を考慮したより精度の高い温度解析を行うことができる。

4. 解析モデル

アダプティブな温度補正法を含むFEMとMHFを用いた相変化を含む熱伝導解析において、両解析による温度変化を比較する。そのため、図2に示すような縦長の10要素から構成されるサンプル地盤において上側から冷却することを想定する。要素形状は横1m、縦10mの領域を等分割する。全要素の初期温度を5°Cとし、上端に-5°C、下端に5°Cの境界条件を与える。定性的な評価をするため密度、比熱、熱伝導係数といった物性値は1としている。今地盤内の相変化が0°Cから-0.5°Cに発生すると仮定すると、地盤内に含まれる水が相変化を起こす場合の地盤の見かけの熱容量は100倍にも及ぶことがある。このため本研究では $\bar{\rho c} = 100\rho c$ と仮定した。ここで、 $\bar{\rho c}$ は相変化中の地盤の熱容量、 $\rho c$ はそれ以外の時の熱容量である。

5. 解析結果

図3は $t=1.0$ ,  $t=10.0$ ,  $t=25.0$ における要素温度の空間分布をFEMとMHFで比較したものである。図4は要素温度の時間変化を比較したものである。ここで、FEMにおいては要素を構成する節点温度の平均温度、MHFにおいては要素代表温度をそれぞれ要素温度としている。両グラフが示すように、FEMによる温度解析とMHFによる温度解析では、それぞれ結果に違いがあ

る。特に、図4の要素9、10に着目すると相変化が生じる温度と相変化に要する時間がFEMとMHFでは、大きく異なっていることが読み取れる。



表1 物性値とその他の諸量

物性値	
密度 $\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	1.0
比熱 $c$ [J/(kgK)]	1.0
熱伝導係数 $k$ [J/(smK)]	1.0
計算条件	
$dt$ [s]	0.1
$T_1$ [°C]	0.0
$T_2$ [°C]	-0.5
初期温度 $T_0$ [°C]	1.0

図2 解析モデル

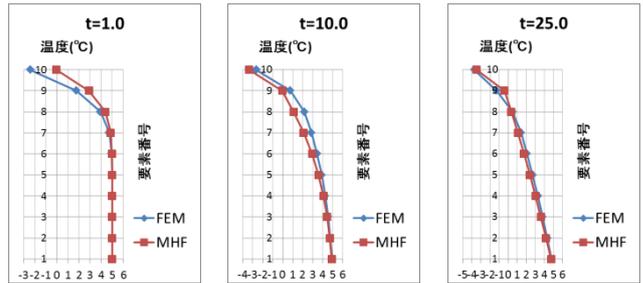


図3  $t=1.0$ ,  $t=10.0$ ,  $t=25.0$ における要素温度の空間分布

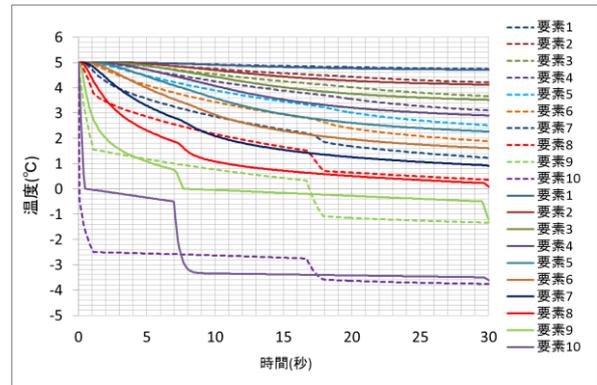


図4 要素温度の時間変化 (破線: FEM, 実線: MHF)

6. 考察・まとめ

図4のグラフにて、9番目と10番目の要素に着目すると、MHFでは相変化が起こると想定した0°Cから-0.5°Cの領域で熱容量が大きくなり、温度変化が鈍くなっている。一方、FEMでは節点で温度と熱流量を管理しているため、要素に着目すると相変化が生じる温度域で相変化が起こっていないように見える。また、それに伴い相変化に要する時間もFEMとMHFとでは、数倍の違いがある。凍結膨張解析は、相変化過程の各要素の膨張ひずみを元に力学的挙動を追うため、要素温度の遷移過程が凍上量や地盤内応力に大きく影響を及ぼす。すなわち、上記の結果から相変化の状態を正確に評価できるアダプティブな温度補正を導入したMHFを用いた温度解析の方が適した解析モデルであると言える。

7. 参考文献

(1) 木下誠一：凍土の物理学, pp153-163, 森北出版, 1982