

底面に多孔質媒体を有する開水路の流れの安定性

Stability of open channel flow over porous media

北海道大学工学部環境社会工学系 ○学生会員 吉村知祐 (Tomohiro YOSHIMURA)
 北海道大学大学院工学研究院 正会員 デリマ アドリアノ コウチニョ
 (Adriano Coutinho de LIMA)
 北海道大学大学院工学研究院 正会員 泉典洋 (Norihiro IZUMI)

1. はじめに

多孔質媒体がある自由水面の流れは物理学や化学、微生物学などあらゆる分野で研究されてきた。例えば、河川と河床や川岸における流体の輸送を解析し、水中の栄養物や汚染物質の挙動を明らかにすることで、水質の変化や有機物の動きを知ることができる。そこで、底面に多孔質媒体を有する水路の流れに関する研究があらゆる研究者により行われてきた。例えば、Chang¹⁾は多孔質層上での Poiseuille 流れの線形安定性解析を行っている。

本研究の目的は、底面に多孔質媒体を有する開水路における層流の線形安定性解析および実験を行うことで、その安定性を明らかにすることである。

2. 支配方程式

多孔層は開水路の底面上に固定され、流れによって移動しないものとし、多孔層の間隙比は場所によらず一定であると仮定する。また、多孔層の透水性は等方的であり、間隙比と同様に場所によらず一定であるとする。さらに、多孔層の下面には不透水層があり、水路中の流れは層流であるとかていする。

流体層の厚さは \tilde{h} で表され、流れ方向座標 \tilde{x} や時間 \tilde{t} による関数であるが、多孔層の厚さは \tilde{h}_m で表され一定であるとする。深さ方向の座標を z とし、その原点を流体層と多孔層の境界面にとる。その時 z の正の値が流体層、負の値が多孔層を示す。そこで、流体層の領域を $0 \leq z \leq \tilde{h}(\tilde{x}, \tilde{t})$ 、多孔層の領域を $-\tilde{h}_m \leq z \leq 0$ とする。

流体層における流速の関係式は次の Navier-Stokes 式

と連続式によって表される。

$$\frac{\partial \vec{u}_a}{\partial \tilde{t}} + (\vec{u}_a \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_a = -\frac{1}{\tilde{\rho}} \vec{\nabla} \tilde{p}_a + \tilde{\nu} \nabla^2 \vec{u}_a + \tilde{g}, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{u}_a = 0 \quad (1a,b)$$

ここで $\vec{u}_a = (\tilde{u}_a, \tilde{w}_a)$ 、 \tilde{x} および \tilde{z} はそれぞれ流れに水平および鉛直方向の座標、 \tilde{u}_a および \tilde{w}_a はそれぞれ流体層における \tilde{x} および \tilde{z} 方向の流速、 \tilde{t} は時間、 $\tilde{\rho}$ は流体の密度、 \tilde{p}_a は流体層における圧力、 $\tilde{\nu}$ は動粘性係数、また $\vec{\nabla} = (\frac{\partial}{\partial \tilde{x}}, \frac{\partial}{\partial \tilde{z}})$ 、

$\nabla^2 = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}$ 、 $\tilde{g} = (\tilde{g}S, -\tilde{g})$ であり、 \tilde{g} は重力加速度、 S は水路勾配、文字の上の \sim は次元量であることを示す。

また、多孔層における流速の関係式は Darcy 式と連続式によって表される。

$$\frac{1}{\phi} \frac{\partial \vec{u}_m}{\partial \tilde{t}} = -\frac{1}{\tilde{\rho}} \vec{\nabla} \tilde{p}_m - \frac{\tilde{\nu}}{\tilde{\kappa}} \vec{u}_m + \tilde{g}, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{u}_m = 0 \quad (2a,b)$$

ここで、 $\vec{u}_m = (\tilde{u}_m, \tilde{w}_m)$ であり、 \tilde{u}_m および \tilde{w}_m はそれぞれ多孔層における \tilde{x} および \tilde{z} 方向の流速、 \tilde{p}_m は多孔層における圧力、 ϕ は間隙比、 $\tilde{\kappa}$ は透水性を表す。

3. 境界条件

3.1. 自由水面 ($z = \tilde{h}(\tilde{x}, \tilde{t})$)

自由水面において、運動学的境界条件は次式で表される。

$$\frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{u}_a \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{x}} = \tilde{w}_a \quad (3)$$

更に、水面に対して法線または接線方向の応力はゼロとなるため、次式が成り立つ。

$$\vec{e}_{ts} \cdot \vec{T}_a \cdot \vec{e}_{ns} = 0, \quad \vec{e}_{ns} \cdot \vec{T}_a \cdot \vec{e}_{ns} = 0 \quad (4a,b)$$

ここで、 \vec{e}_{ts} または \vec{e}_{ns} はそれぞれ水面に対して接線または法線方向の単位ベクトルであり、次式で表される。

$$\vec{e}_{ns} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \tilde{h}(\tilde{x}, \tilde{t})}{\partial \tilde{x}}\right)^2}} \left(-\frac{\partial \tilde{h}(\tilde{x}, \tilde{t})}{\partial \tilde{x}}, 1 \right) \quad (5a)$$

$$\vec{e}_{ts} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \tilde{h}(\tilde{x}, \tilde{t})}{\partial \tilde{x}}\right)^2}} \left(1, \frac{\partial \tilde{h}(\tilde{x}, \tilde{t})}{\partial \tilde{x}} \right) \quad (5b)$$

また、 \vec{T}_a は応力テンソルであり、次式で表される。

$$\vec{T}_a = \begin{bmatrix} -\tilde{p}_a + 2\tilde{\rho}\tilde{v}\frac{\partial \tilde{u}_a}{\partial \tilde{x}} & \tilde{\rho}\tilde{v}\left(\frac{\partial \tilde{u}_a}{\partial \tilde{z}} + \frac{\partial \tilde{w}_a}{\partial \tilde{x}}\right) \\ \tilde{\rho}\tilde{v}\left(\frac{\partial \tilde{u}_a}{\partial \tilde{z}} + \frac{\partial \tilde{w}_a}{\partial \tilde{x}}\right) & -\tilde{p}_a + 2\tilde{\rho}\tilde{v}\frac{\partial \tilde{w}_a}{\partial \tilde{z}} \end{bmatrix} \quad (6)$$

3.2. 流体層-多孔層の境界面 ($\tilde{z} = 0$)

次式は Jones (1973)²⁾ による境界条件である。

$$\frac{\partial \tilde{u}_m}{\partial \tilde{z}} + \frac{\partial \tilde{w}_m}{\partial \tilde{x}} = \frac{\alpha}{\sqrt{K}} (\tilde{u}_a - \tilde{u}_m) \quad (7)$$

ここで、 α は多孔質媒体に依存する定数である。この式は経験則であるが、この式を用いることで実現象がよく再現できることが分かっている。また、慣性による影響を考慮しない。

更に、境界面では面に対して法線方向の流速と圧力は連続するため次式が成り立つ。

$$\tilde{w}_a = \tilde{w}_m, \quad \tilde{p}_a = \tilde{p}_m \quad (8a,b)$$

3.3. 多孔層の底面 ($\tilde{z} = -\tilde{h}_m$)

多孔層下面における法線方向の流速は0であるため次式が成り立つ。

$$\tilde{w}_m = 0 \quad (9)$$

4. 無次元化・流関数

前述した支配方程式または境界条件を単位によらないものとするために以下の式により無次元化する。

$$(\tilde{U}_a, \tilde{U}_m) = \tilde{u}_f (U_a, U_m) \quad (10)$$

$$(\tilde{u}_a, \tilde{w}_a, \tilde{u}_m, \tilde{w}_m) = \tilde{u}_f (u_a, u_m, w_a, w_m) \quad (11)$$

$$(\tilde{x}, \tilde{z}, \tilde{h}, \tilde{h}_m) = \tilde{h}_0 (x, z, h, h_m) \quad (12)$$

$$(\tilde{p}_a, \tilde{p}_m) = \tilde{\rho}\tilde{u}_f^2 (p_a, p_m) \quad (13)$$

$$\tilde{t} = \frac{\tilde{h}_0}{\tilde{u}_f}, \quad \kappa = \frac{\tilde{\kappa}}{\tilde{h}_0} \quad (14a,b)$$

ここで、 \tilde{u}_f は等流状態における水面での流速、 \tilde{h}_0 は流体層と多孔層の境界面からの水深を表す。

また、レイノルズ数 R 、フルード数 F は次式で表される。

$$R = \frac{\tilde{u}_f \tilde{h}_0}{\nu}, \quad F = \frac{\tilde{u}_f}{\sqrt{g \tilde{h}_0}} \quad (15a,b)$$

式(10)~(15)を用いて Navier-Stokes 方程式および Darcy の式を変形すると次式で表される。

$$\frac{\partial U_a}{\partial t} + (U_a \cdot \nabla) U_a = -\nabla p_a + \frac{1}{R} \nabla^2 U_a + \frac{1}{F^2} S \cdot \nabla \cdot U_a = 0 \quad (16a,b)$$

$$\frac{1}{\phi} \frac{\partial U_m}{\partial t} = -\nabla p_m - \frac{1}{\kappa R} U_m + \frac{1}{F^2} S \cdot \nabla \cdot U_a = 0 \quad (17a,b)$$

さらに、式(10)~(14)で無次元化された支配方程式、および境界条件に、次式で表される流関数を導入する。

$$(u_a, w_a, u_m, w_m) = \left(\frac{\partial \psi_a}{\partial z}, \frac{\partial \psi_a}{\partial x}, \frac{\partial \psi_m}{\partial x}, \frac{\partial \psi_m}{\partial z} \right) \quad (18)$$

5. 漸近展開

次式で表される漸近展開を導入する。

$$\begin{pmatrix} \psi_a \\ \psi_m \\ p_a \\ p_m \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_{a0}(z) \\ \psi_{m0}(z) \\ p_{a0}(z) \\ p_{m0}(z) \\ 1 \end{pmatrix} + A \begin{pmatrix} \psi_{a1}(z) \\ \psi_{m1}(z) \\ p_{a1}(z) \\ p_{m1}(z) \\ h_1 \end{pmatrix} e^{i(kx - \omega t)} \quad (19)$$

ここで、 A は攪乱の振幅、 k は波数である。 ω は、 $\omega = \omega_r + i\Omega$ で表され、 ω_r は攪乱の角周波数、 Ω は成長率を表す。

式(19)を支配方程式および境界条件に代入し、 $\psi_{a0}(z), \psi_{m0}(z), p_{a0}(z), p_{m0}(z)$ の解を求めると、それぞれの解は次式で表される。

$$\psi_{a0}(z) = \frac{2RSz^2\alpha - RSz^2\alpha + 6RSz\sqrt{R} + 6RSz\alpha\kappa}{6F^2\alpha} \quad (20)$$

$$\psi_{m0}(z) = \frac{RSz\kappa}{F^2} \quad (21)$$

$$p_{a0}(z) = p_{m0}(z) = \frac{1-z}{F^2} \quad (22a,b)$$

境界条件の下で支配方程式を解くため、Chebyshev 多項式を用いたスペクトル法を用いると、 Ω は以下の関数であると導出される。

$$\Omega = \Omega(\alpha, k, R, S, \kappa, \phi, h_m) \quad (23)$$

この式は、 Ω が $\alpha, k, R, S, \kappa, \phi, h_m$ の関数で表されることを示す。ここで $\Omega > 0$ の時に流れが不安定となり、 $\Omega < 0$ の時に安定となる。

6. 解析結果と考察

α は多孔質媒体に依存する値になる。本研究では、Beavers と Joseph³⁾ によって用いられた $\alpha = 0.1$ を用いる。図-1 は k - R 軸における成長率 Ω のコンタであり、(a),(b) はそれぞれ $S = 0.01, 0.001$ の場合である。

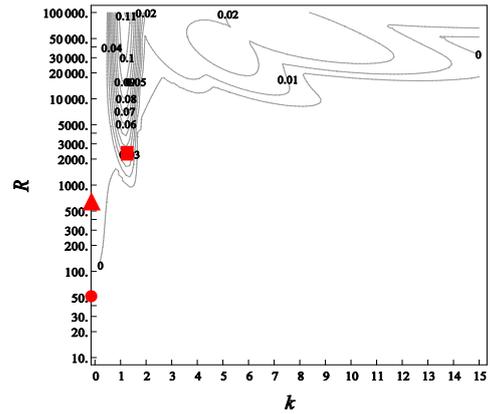
また、図-1 は硅砂3号 ($\phi = 0.513$, 透水係数は 0.0125m/s) を多孔メディアとして利用し、多孔層の厚さを4cmで統一している。図-1(a)および(b)から、勾配が大きくなると臨界レイノルズ数が小さくなることを見て取ることができ、勾配が安定性の変化に関係することが推測される。泉・デリマ⁴⁾によって多孔層がない場合について同様の手法で導出されたコンタでは、コンタの大方の形は一致していたものの、波数が小さい領域で成長率の大きい部分が現れないことから、この部分は多孔層が存在することによる不安定性であると推測される。一方、波数が小さく成長率が比較的小さい不安定領域は、多孔層に関係しない不安定性であると考えられる。以上のことから、勾配が大きい場合、多孔層に関係しない不安定性が支配的となり、勾配が小さい場合は、多孔層関係した不安定性が支配的となると推測される。ここで、多孔層に関係しない不安定性を“free surface mode”、多孔層との関係が強い不安定性を“porous layer mode”と呼ぶ。

図-2(a)および(b)は、それぞれ硅砂3号を利用し、勾配 $S = 0.01$ 、多孔層の厚さを4cmとし、レイノルズ数 $R = 700$ および 2000 の条件での流速分布である。図-2は縦軸が z 方向の距離であり、 $z=0$ が多孔層と流体層の境界面を表す。また、横軸は流関数を表す。

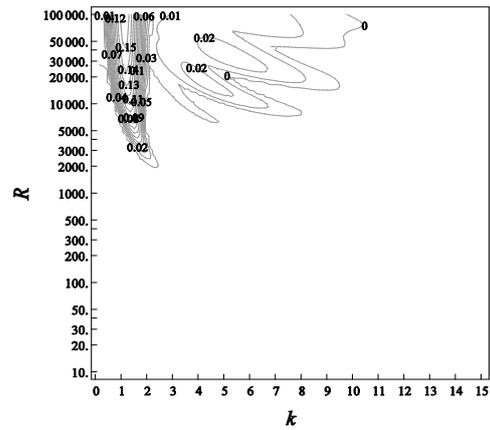
レイノルズ数 $R=700$ の場合、図-1(a)から“free surface mode”であることが分かる。また、図-2(a)から多孔層における擾乱が小さく、流体層において擾乱が生じることが見て取れる。一方で、レイノルズ数が 2000 の場合では、図-1(a)から“porous layer mode”であることが分かる。また、図-2(b)から流体層と多孔層の境界面および多孔層で擾乱が比較的大きいことが見て取れる。これは、流体層における不安定な流れが多孔層にまで伝播したと推測される。

7. 実験方法

実験装置は、アクリルで作られた開水路の上流端にタンクからホースで流体を流し込み、開水路を流れ出る流体をタンクで溜め、ポンプで上流部のタンクに循環させるという構成である。開水路は $4 \times 20 \times 180\text{cm}$

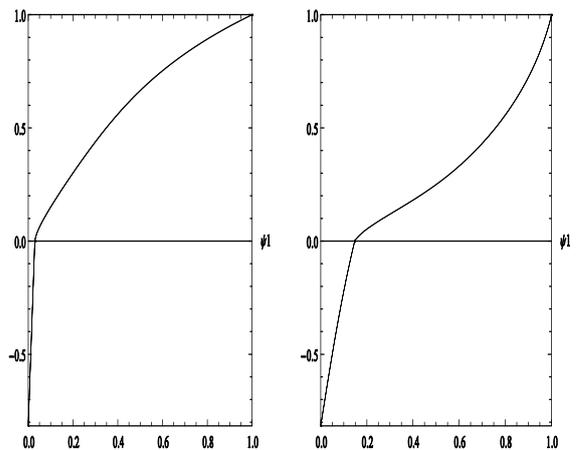


(a)

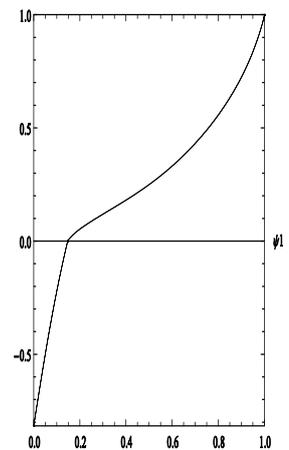


(b)

図-1 硅砂3号を用いた(a) $S=0.01$, (b) $S=0.001$ の場合での $\kappa - R$ 面の成長率 Ω のコンタ
9.1. ●実験1、▲実験2、■実験3の条件における Ω の値



(a)



(b)

図-2 (a) $R=700$, (b) $R=2000$ の場合での高さ z における流関数の擾乱

であり中心部分の底面に130cmの長さの多孔メディアを敷き詰める。また、開水路の下流端は固定し、上流端に可動式の台を備え付けることで上流端の高さを変えることを可能にし、勾配を変化させるという仕組みである。勾配や流量、多孔メディアを変更し、それぞれの条件でどのような流れとなるのかを実験により解明する。

開水路中の流体の流れの安定性、または不安定性は目視により判断する。流体の流れが安定となっている時、水面部分に動きが見られず穏やかな流れとなっている。一方、不安定である時は、流れが攪乱することで水面にゆれが生じる。よって、本実験では水面に着目することで流れが安定であるのか不安定であるのかを判断する。

8. 実験

8.1. 実験1

珪砂3号を多孔メディアとして利用し、勾配 $S = 0.01$ 、多孔層の厚さを4cm、水深を多孔層から0.3cm、レイノルズ数 $R = 68$ と設定した。このとき、図-1(a)から成長率 $\Omega < 0$ より流体の流れは安定であると分かる。このとき、流れの攪乱が発生しないことから水面に動きが見られなかった。

8.2. 実験2

多孔メディア、勾配、多孔層の厚さは実験1と同様であり、水深を多孔層から0.9cm、レイノルズ数 $R = 734$ と設定した。このとき、実験1と同様に図-1(a)を参照すると、 $\Omega > 0$ となり、波数 $k \neq 0$ の“free surface mode”であることが分かる。このとき、水面には波が見られ、目視からも流れの不安定性が確認できた。

8.3. 実験3

多孔メディア、勾配、多孔層の厚さは実験1または2と同様であり、水深を多孔層から1.4cm、レイノルズ数 $R = 2052$ と設定した。このとき、図-1(a)を参照すると、 $\Omega > 0$ であり、波数 $k \neq 1$ の“porous layer mode”であることが分かる。このときも実験2と同

様に、水面に揺れが生じていたが実験2より大きな揺れが生じていた。

8.4. 考察

実験2および3の条件では、解析上不安定であり、実験でも不安定な流れを示した為、解析結果と実験結果は一致した。また、実験2の条件では波数が微小であり、実験3の条件では波数が1程度であることから実験3の条件の場合はより大きな攪乱を示すことは妥当であると判断できる。しかし、実験においては流れが非線形になってしまうため、あくまで参考として捉えるべきである。

9. おわりに

本論分では、多孔層があることによりコンタが密集した領域(“porous layer mode”)が発生すること、また、勾配を変えることにより不安定性に大きな影響を与えることが、図-1から確認できた。

物理的条件を変えることによる不安定性の変化を研究し、物理的条件との相関性を解明することを今後のプランとしている。

参考文献

- 1) Chang, M., Chen, F. and Straughan, B.: Instability of Poiseuille flow in a fluid overlying a porous layer, Journal of Fluid Mechanics, Vol.564, pp.287-303, 2006.
- 2) Jones, I.P.: Low Reynolds number flow past a porous spherical shell, Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, Vol.73, pp.231-238, 1973.
- 3) Beavers, G.S. and Joseph, D.D.: Boundary conditions at a naturally permeable wall, Journal of Fluid Mechanics, Vol.30, pp.197-207, 1967.
- 4) 泉典洋・デリマ、アドリアーノ コーティニョ：自由表面流の安定性再考、Journal of Applied Mechanics, 土木学会 2014