

安定解析による安定川幅に対する浮遊砂の影響

Stability Analysis on the Influence of Suspended load to the Self-adjustment of River Width

北見工業大学 社会環境工学科 学生会員 ○前原航大 (Kouta Maehara)
北見工業大学 社会環境工学科 正会員 渡邊康玄 (Yasuharu Watanabe)

1.はじめに

河道形状は流れによって規定されており、年平均最大流量程度の水理量でほぼ決定されているといわれている。このことの意味は流量の変化によって河道形状が変化するということであり、近年よく発生する局所的な集中豪雨やダム等における出水時の流量の調節等の流量の増減によって今後の河道形状が大きく変化することが考えられる。その例として砂州や滞筋の固定といったような現象はすでに各地の河川において発生している。これらの現象は洪水時の流量の低下が発生要因の一つであり、流量が減少することで発生する流水断面幅の減少としても捉えることができる。河道幅は治水上河道拡幅を大規模に行わなければならない場合を除き、維持管理上からも従来河川が自然に形成してきた川幅に基づいて決定されるべきである。しかし、通常時には自身で形成してきた形状が維持管理上好ましい形状であるかもしれないが、流量が大きく変化するような場合ではそのような形状が好ましいとは一概に言えなくなる。今後河川を管理していくにあたっては従来通りの方法ではなく、流量の大きな変化を踏まえつつ管理していく必要がある。そのためには安定的に維持される川幅と水理量の関係を予め結びつけておくことが重要となる。渡邊ら¹⁾は、掃流砂を対象に安定解析を実施し流量と川幅の関係の導出を試みている。その結果は、比較的継続時間が長く、河道に大きな影響を与えるといわれる融雪出水が生じる北海道内の1級河川データを用いて検証されており、レジーム則の結果とほぼ一致する結果を得ている。しかしながら、川幅の決定には、浮遊砂が大きく関与しており、その影響を取り込むことが必要である。本研究では渡邊らの研究を基に浮遊砂を取り込んで検討を行ったものである。

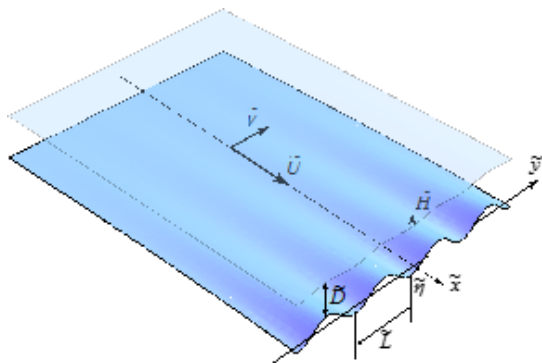


図-1 座標系

2.基礎式

川幅一定の直線水路における拡散項を省略した定常2次元浅水流式と連続の式および掃流砂を対象とした流砂連続式は、座標系を図-1のようにとると、式(1)～(4)で表される。

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{t}} + \bar{U} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{x}} + \bar{V} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{y}} + \bar{g} \frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{x}} + \frac{\bar{\tau}_x}{\bar{\rho} \bar{D}} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{t}} + \bar{U} \frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{x}} + \bar{V} \frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{y}} + \bar{g} \frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{y}} + \frac{\bar{\tau}_y}{\bar{\rho} \bar{D}} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial \bar{D}}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial (\bar{U} \bar{D})}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial (\bar{V} \bar{D})}{\partial \bar{y}} = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial \bar{\eta}}{\partial \bar{t}} + \frac{1}{1-p} \left(\frac{\partial \bar{Q}_{bx} + \partial \bar{Q}_{sx}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{Q}_{by} + \partial \bar{Q}_{sy}}{\partial \bar{y}} \right) = 0 \quad (4)$$

ここで、 $\bar{t}$ ；時間、 $\bar{x}$, $\bar{y}$ ；それぞれ縦断方向および横断方向座標軸、 $\bar{U}$, $\bar{V}$ ；それぞれ $\bar{x}$ 軸方向および $\bar{y}$ 軸方向の流速、 $\bar{H}$ ；水位、 $\bar{D}$ ；水深、 $\bar{\eta}$ ；河床高 ($=\bar{H}-\bar{D}$)、 $\bar{\tau}_x$, $\bar{\tau}_y$ ；それぞれ $\bar{x}$ 軸方向および $\bar{y}$ 軸方向の剪断力、 $\bar{Q}_{bx}$, $\bar{Q}_{by}$ ；それぞれ $\bar{x}$ 軸方向および $\bar{y}$ 軸方向の掃流砂量、 $\bar{Q}_{sx}$, $\bar{Q}_{sy}$ ；それぞれ $\bar{x}$ 軸方向および $\bar{y}$ 軸方向の浮遊砂量、 $\bar{\rho}$ ；水の密度、 $\bar{g}$ ；重力加速度、 p ；河床の空隙率である。なお、各記号に付されている $\sim$ は次元を有していることを表す記号である。

式(1)～(4)は、平坦河床上の等流の諸元を基に、

$$(U, V) = (\bar{U}, \bar{V}) / \bar{U}_0, D = \bar{D} / \bar{D}_0, H = \bar{H} / F_0^2 \bar{D}_0,$$

$$F_0 = \bar{U}_0 / (\bar{g} \bar{D}_0)^{1/2},$$

$$(Q_{bx}, Q_{by}, Q_{sx}, Q_{sy}) = (\bar{Q}_{bx}, \bar{Q}_{by}, \bar{Q}_{sx}, \bar{Q}_{sy}) / (\delta \bar{g} \bar{d}_s^3)^{1/2}$$

$$(\tau_x, \tau_y) = (\bar{\tau}_x, \bar{\tau}_y) / (\bar{\rho} \bar{U}_0^2), (x, y) = (\bar{x}, \bar{y}) / \bar{D}_0,$$

$t = \bar{t} / (\bar{D}_0 / \bar{U}_0)$ で無次元化を行うと、式(5)～(8)となる。

ここで、添え字の₀は等流時の値を示している。また、 F_0 ；フルード数、 $\bar{d}_s$ ；河床材料の粒径、 δ ；河床材料の

水中比重、 $Q_0 = (\delta \bar{d}_s^3)^{1/2} / [F_0(1-p)]$, $d_s = \bar{d}_s / \bar{D}_0$ である。

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\tau_x}{D} = 0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial y} + \frac{\tau_y}{D} = 0 \quad (6)$$

$$\frac{\partial D}{\partial t} + \frac{\partial (U D)}{\partial x} + \frac{\partial (V D)}{\partial y} = 0 \quad (7)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + Q_0 \left(\frac{\partial Q_{bx} + \partial Q_{sx}}{\partial x} + \frac{\partial Q_{by} + \partial Q_{sy}}{\partial y} \right) = 0 \quad (8)$$

x, y 方向の浮遊砂量は、浮遊砂の濃度を C とすると、式(9)で表される。また、3次元表示の浮遊砂濃度の連続式は、式(10)で表され、これを無次元化すると式(11)となる。また、浮遊砂濃度の連続式において、水面及び浮遊砂濃度の基準面における境界条件は式(12)である。

$$Q_{sx} = U \int_{F_0^2 H-D}^{F_0^2 H} C dz, \quad Q_{sy} = V \int_{F_0^2 H-D}^{F_0^2 H} C dz \quad (9)$$

$$\bar{U} \frac{\partial C}{\partial x} + \bar{V} \frac{\partial C}{\partial y} - \bar{W}_f \frac{\partial C}{\partial z} = \tilde{\psi} \left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \right) \quad (10)$$

$$U \frac{\partial C}{\partial x} + V \frac{\partial C}{\partial y} - w_f \frac{\partial C}{\partial z} = \psi \sqrt{c_0} \left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \right) + \sqrt{c_0} \psi \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \quad (11)$$

$$-w_0 C = \sqrt{c_0} \psi \frac{\partial C}{\partial z}; z = D + \eta \quad C = C_{b0}; z = a_v + \eta \quad (12)$$

ここで、 $\bar{w}_f$ ；砂粒子の沈降速度 ($\bar{w}_f = \bar{U}_0 w_f$)、 $\tilde{\psi}$ ；渦動粘性係数 ($\tilde{\psi} = \bar{D}_0 \sqrt{\delta g d_s \psi}$)、 $\bar{z}$ ；基準面からの高さ ($\bar{z} = \bar{U}_0 z$)、 a_v ；浮遊砂濃度 C の基準面高さである。また、砂粒子の沈降速度は式(13)で表される Rubey の式、基準面濃度は式(14)で示される Van Rijn の式¹⁾をそれぞれ用いた。

$$w_f = \sqrt{\frac{c_0}{3}} \left(\sqrt{\frac{2}{3} + 36 \frac{\theta_0}{R_p^2}} - \sqrt{36 \frac{\theta_0}{R_p^2}} \right) \quad (13)$$

$$C_{b0} = 0.015 \frac{a_s}{a_v} \frac{T^{1.5}}{R_p^{0.2}}, \quad a_v = \exp(2.4 - \frac{1}{2.5\sqrt{c_0}}) \quad (14)$$

$$T = \frac{\theta - \theta_{cr}}{\theta_{cr}}$$

ここで、 R_p は粒子レイノルズ数である。

A を摂動パラメータとして (U, V, H, C) を式(15)で示されるよう等流時の値と摂動量とに分ける、
 $(U, V, H, D, C) = (1, 0, H_0, 1, C_0) + A(U_1, V_1, H_1, D_1, C_1)$ (15)
 摂動量については式(16)で表す横断方向に波長 $\bar{L}$ を持つ微小攪乱を与える。ここで摂動量の縦断的な形状が問題となる。本来上下流端の境界条件を満足するように縦断変化を規定することとなる。ここでは上流から下流に向けて分岐する現象を考えると、上流端では分岐をしていない状態すなわち平坦床であることが境界条件として与えられる。下流端においては分岐部における形状が境界条件となるが、形状が一義的に決定できないため、ここでは、自然河川で見られる緩やかな分岐形状を考慮することとする。以上から、摂動量の縦断変化は、無限上流 $x = -\infty$ で振幅が 0、下流端で微小な振幅を持つ形状を与えることとし、縦断的な増幅率を r としている。

$$(U_1, V_1, H_1, D_1, C_1) = (Co u_1, Si v_1, Co h_1, Co d_1, Co c_1) E_1 \quad (16)$$

ここで、

$$(Si, Co, E) = (\sin(\lambda y), \cos(\lambda y), \exp(rx + \omega t)) \quad (17)$$

$$\lambda = 2\pi \frac{\bar{D}}{\bar{L}} \quad (18)$$

式(5)～(6)、(10) に式(15) および式(16) を代入し、式(17)中の摂動量の時間に関する増幅率 ω が十分に小さく摂動パラメータと同様のオーダーであると仮定すると、A

の 1 次のオーダーに関して式(19)～(23) が得られた後、式(24)が得られる、なお、 c_1 は、式(23)を解析的に解くことによって u_1, v_1, h_1, d_1 の関数として求められる。

$$\frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial H_1}{\partial x} + \beta(\tau_{x1} - D_1 c_0) = 0 \quad (19)$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial H_1}{\partial y} + \beta(\tau_{y1}) = 0 \quad (20)$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial y} + \frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial D_1}{\partial x} = 0 \quad (21)$$

$$F_0^2 \frac{\partial H_1}{\partial t} - \frac{\partial D_1}{\partial t} + Q_0 \left(\frac{\partial Q_{bx1} + Q \partial Q_{sx1}}{\partial x} + \frac{\partial Q_{by1} + Q \partial Q_{sy1}}{\partial y} \right) = 0 \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial C_1}{\partial x} - w_f \frac{\partial C_1}{\partial z} \\ = \frac{\psi_0}{\beta} \sqrt{c_0} \left(\frac{\partial^2 C_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C_1}{\partial y^2} \right) + \sqrt{c_0} (\psi_0 \frac{\partial^2 C_1}{\partial z^2} + \psi_1 \frac{\partial^2 C_0}{\partial z^2}) \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_{24} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & f_{34} \\ f_{41} & f_{42} & f_{43} & f_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ h_1 \\ d_1 \end{bmatrix} = 0 \quad (24)$$

ここで、 $f_{11} \sim f_{44}$ は、行列の各要素であり、それぞれ次式で表される

$$f_{11} = r - \frac{3C_{f0}}{\sqrt{2}(-1+2CT)} + \frac{\sqrt{2}CTC_{f0}}{-1+2CT}$$

$$f_{12} = f_{21} = f_{24} = f_{33} = 0$$

$$f_{13} = f_{31} = f_{34} = r$$

$$f_{14} = \frac{C_{f0}(\sqrt{2}-\sqrt{2}CH-2\sqrt{2}CT)}{-1+2CT}$$

$$f_{22} = r - \frac{3C_{f0}}{\sqrt{2}(-1+2CT)} + \frac{\sqrt{2}CTC_{f0}}{-1+2CT}$$

$$f_{23} = -\lambda$$

$$f_{32} = \lambda$$

$$f_{41} = Q_0 r \left(\frac{e^{j_1 F_0^2 J_{1u}}}{j_1} - \frac{e^{-j_1 + j_1 F_0^2 J_{1u}}}{j_1} + \frac{e^{j_2 F_0^2 J_{2u}}}{j_2} - \frac{e^{-j_2 + j_2 F_0^2 J_{2u}}}{j_2} - \right.$$

$$\left. \frac{C_{b0} e^{W_f(a_v - F_0^2)}}{W_f} + \frac{C_{b0} e^{W_f + W_f(a_v - F_0^2)}}{W_f} - \frac{e^{a_v W_f - W_f F_0^2 J_{0u}}}{W_f} + \frac{e^{W_f + a_v W_f - W_f F_0^2 J_{0u}}}{W_f} - \frac{\emptyset}{2\sqrt{2}(-1+2CT)} + \frac{CT\emptyset}{\sqrt{2}(-1+2CT)} - \frac{\sqrt{2}FT\emptyset}{-1+2CT} \right)$$

$$f_{42} = Q_0 \lambda \left(-\frac{C_{b0} e^{W_f(a_v - F_0^2)}}{W_f} + \frac{C_{b0} e^{W_f + W_f(a_v - F_0^2)}}{W_f} + \frac{\emptyset}{2\sqrt{2}} - \right.$$

$$\left. \frac{\sqrt{2}FT\emptyset}{-1+2CT} \right)$$

$$f_{43} = \frac{e^{j_1 F_0^2 J_{1h} Q_0 r}}{j_1} - \frac{e^{-j_1 + j_1 F_0^2 J_{1h} Q_0 r}}{j_1} + \frac{e^{j_2 F_0^2 J_{2h} Q_0 r}}{j_2} -$$

$$\frac{e^{-j_2 + j_2 F_0^2 J_{2h} Q_0 r}}{j_2} + Q_0 r F_0^2 + C_{b0} e^{-W_f(-1-a_v + F_0^2)} Q_0 r F_0^2 +$$

$$\omega F_0^2 + \frac{Q_0 r r \lambda c^2 \emptyset F_0^2}{\sqrt{\emptyset 0}}$$

$$f_{44} = Q_0 r \left(-1 + \frac{e^{j_1 F_0^2 J_{1d}}}{j_1} - \frac{e^{-j_1 + j_1 F_0^2 J_{1d}}}{j_1} + \frac{e^{j_2 F_0^2 J_{2d}}}{j_2} - \right.$$

$$\left. \frac{e^{-j_2 + j_2 F_0^2 J_{2d}}}{j_2} - \frac{e^{a_v W_f - W_f F_0^2 J_{0d}}}{W_f} + \frac{e^{W_f + a_v W_f - W_f F_0^2 J_{0d}}}{W_f} - \right.$$

$$\left. \frac{FH\emptyset}{\sqrt{2}(-1+2CT)} + \frac{\sqrt{2}CTFH\emptyset}{-1+2CT} - \frac{\sqrt{2}CHFT\emptyset}{-1+2CT} \right) - \omega$$

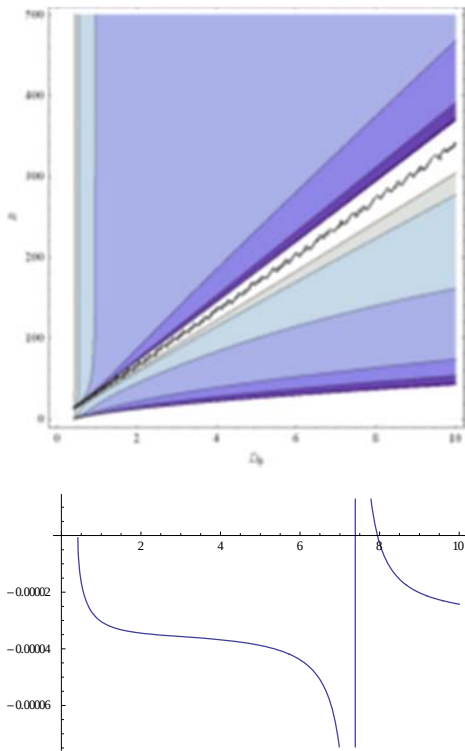


図-2 等流水深と基本川幅の関係 ($\tilde{a}_s = 0.001m$, $\tilde{I} = 1/5000, r=0.2$) 上図：時間増幅率のコンター, 下図： $\tilde{B}=250(m)$ の ω の値

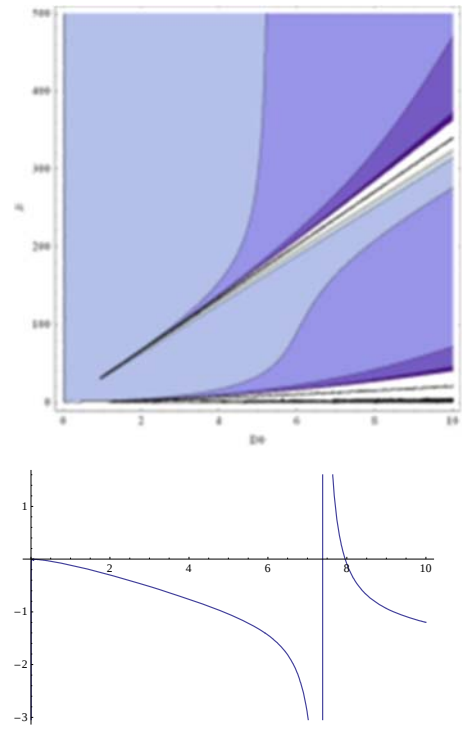


図-3 浮遊砂を考慮した等流水深と基本川幅の関係 ($\tilde{a}_s = 0.001m$, $\tilde{I} = 1/5000, r=0.2$) 上図：時間増幅率のコンター, 下図： $\tilde{B}=250(m)$ の ω の値

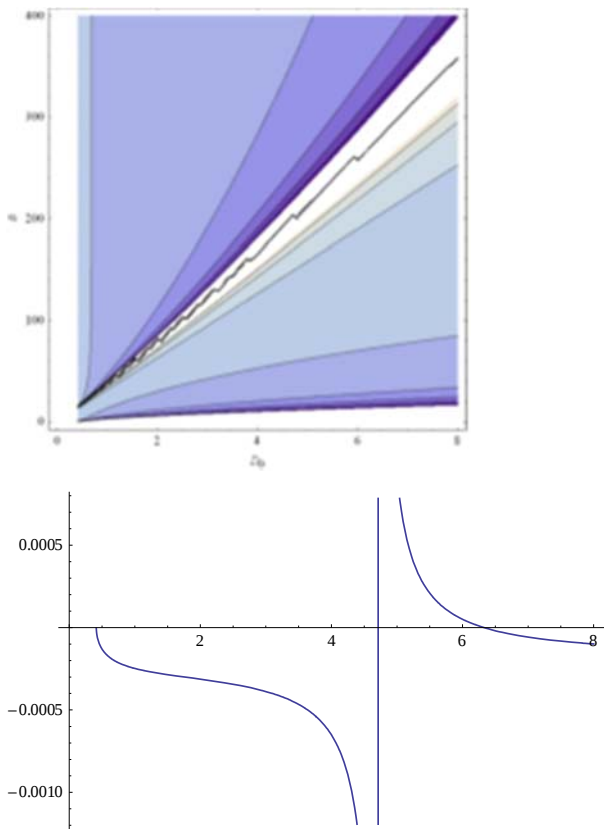


図-4 等流水深と基本川幅の関係 ($\tilde{a}_s = 0.005m$, $\tilde{I} = 1/1000, r=0.2$) 上図：時間増幅率のコンター, 下図： $\tilde{B}=200(m)$ の ω の値

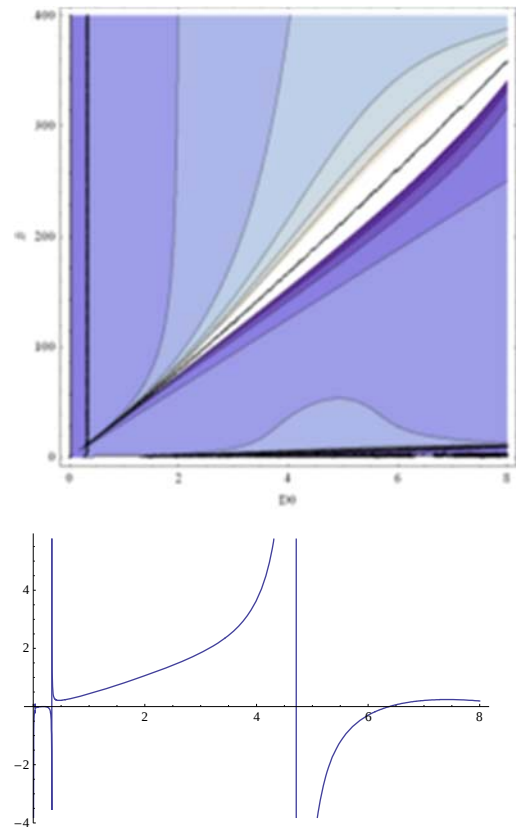


図-5 浮遊砂を考慮した等流水深と基本川幅の関係 ($\tilde{a}_s = 0.005m$, $\tilde{I} = 1/1000, r=0.2$) 上図：時間増幅率のコンター, 下図： $\tilde{B}=200(m)$ の ω の値

ここで、 J_{0u} , J_{0d} , J_{1u} , J_{1d} , J_{1h} , J_{2u} , J_{2d} , J_{2h} , j_1 , j_2 はそれぞれ A の 1 次のオーダーの浮遊砂濃度の振幅 c_1 における u_1 , h_1 , d_1 , z の係数であり

$$c_1 = J_0 \exp[-W_f(z - a_v)] + J_1 \exp[j_1 z] + J_2 \exp[j_2 z]$$

$$J_0 = J_{0u} u_1 + J_{0d} d_1$$

$$J_1 = J_{1u} u_1 + J_{1d} d_1 + J_{1h} h_1$$

$$J_2 = J_{2u} u_1 + J_{2d} d_1 + J_{2h} h_1$$

である。

θ は無次元掃流力、 C_f は河床の摩擦係数、 ϕ は流砂量であり添え字の 0 は等流時の値を示している。 C_H , C_T , F_H および F_T はそれぞれ

$$C_H = \frac{1}{C_{f0}} \frac{\partial C}{\partial D}, \quad C_T = \frac{\theta_0}{C_{f0}} \frac{\partial C}{\partial \theta},$$

$$F_H = \frac{1}{\phi_0} \frac{\partial \phi}{\partial D}, \quad F_T = \frac{\theta_0}{\phi_0} \frac{\partial \phi}{\partial \theta}$$

である。

式(24) が解を持つための条件として式(25) が得られる。

$$\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_{24} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & f_{34} \\ f_{41} & f_{42} & f_{43} & f_{44} \end{vmatrix} = F_1(\lambda, \omega, \theta_0, d_s, R_p) = 0 \quad (25)$$

式 (25) から θ_0 と d_s および R_p を与えることによって、任意の波数の摂動量の時間に関する増幅率 ω を算出することが可能である。すなわち。ある水理量の条件下において、最大の増幅率 ω となる波数を求めることが可能となる。

3.基本川幅

前節で求められる河床の摂動量は十分発達した場合、幾筋もの滞筋を形成することとなる、この滞筋を派川形成のきっかけ、あるいはある単位幅流量が与えられた時に形成される河床形状の横断方向の単位と捉えたと、摂動量の増幅率が最大となる波数は、ある水理量の下で維持可能な川幅あるいは派川を形成する基本川幅と考えることができる。

に用いる流砂量式 ϕ および河床抵抗 C_f にそれぞれ、式 (26), (27) で表される Meyer-Peter & Muller の式および Engelund & Hansen の式⁴⁾を用いて、等流水深と基本川幅の関係を直接、算出することが可能となる。一例として、 $ds=0.001m$, $I=1/1000$ とした場合と、 $ds=0.001m$, $I=1/5000$ における浮遊砂を考慮した場合と浮遊砂を考慮した場合の計算結果を、それぞれ図-2 と 3、4 と 5 に示す。ここで、 $\bar{I}$ は河床勾配、 $\bar{B}$ は川幅である。なお r は初期微小攪乱の縦断方向の増幅率であり未知数であるが、ここでは既往の検討を参考にして、 $r = 0.20$ としている。

$$\phi = (\theta - \theta_{cr}) \quad (26)$$

$$C_f = \frac{1}{[6 + 2.5 \ln(\frac{1}{2.5 d_s})]^2} \quad (27)$$

ここで、 θ_{cr} は限界掃流力である。

4.基本川幅に与える浮遊砂の影響

図-2 と図-3 および図-4 と図-5 をそれぞれ比較すると、浮遊砂は、増幅率を増加させる働きを持つことが読み取れる。また、図-2 と図-4 を比較すると、増幅率の符号が逆転する結果を得ており、浮遊砂が卓越する場合、微小攪乱の発達に極めて大きな影響を与えることがわかる。しかしながら、基本川幅を決定すると考えられている特異点に関しては、浮遊砂を取り込んだ解析結果と掃流砂のみを扱った解析結果では、大きな差が認められない結果を得た。

5.おわりに

微小攪乱に与える浮遊砂の影響は、きわめて大きくなる結果となったが、基本川幅自体には影響を及ぼしていない。今後は、実河川における川幅と流量の関係を整理し、今回の解析結果の妥当性を検証する必要がある。

参考文献

- 1) 渡邊康玄, 早川博, 進治真人: 安定解析に基づく川幅の自立形成機構, 土木学会水工学論文集第 53 巻, pp.-, 2009 年 2 月
- 2) Rubey, W.W.; Settling Velocities of Gravel, Sand and Silt Particles, Amer. Jour. Sci., Vol. 25, 1993.
- 3) Van Rijn, L.C.; Sediment transport Part. II, Suspended load transport, Jour. Of Hydr. Eng. ASCE, Vol. 110, 181, 1987.
- 4) Engelund, F. and Hansen, E.; A Monograph on Sediment Transport in Alluvial Streams. Copenhagen, Danish Technical Press, 1967.